

50255

# MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

NYOLCZADIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ és RADOS GUSZTÁV



BUDAPEST 1899

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA  
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT



FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

## A MATEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

### NYOLCZADIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

#### Első füzet.

SKOPÁL ISTVÁN: Megfelelő háromszögek és tetraéderek polárterekben (Első közlemény) 1; KÜRSCHÁK JÓZSEF: A valós számoknak raczionális törttekkel való megközelítéséről 10; PERÉNYI KANDID: Egy elemi geometriai tétel 15; KLUPATHY JENŐ: Egy ívlámpa hatásfokáról 23; ELLEND JÓZSEF: Villamos hullámhosszúság és törési mutató 29; CSEMEZ JÓZSEF: Az érintkezési elektromosság eredetéről (CHRISTIANSEN után) 34; SZJÁRTÓ MIKLÓS: Van der Waals megfelelőkre vonatkozó törvényének igazolása. Kritikus állandók meghatározása. (Amagat után) 43; *Megoldott feladatok*. (Lévay Ede, Doroghi Ignác, Péch Aladár) 55; *A Matematikai és Fizikai Társulat tagjainak névsora* 59.

#### Második füzet.

VISNYA ALADÁR: Az indukált helyettesítések elméletéhez 65; KLUG LIPÓT: Észrevételek «Egy elemi geometriai tétel» című cikkéhez 71; PEKÁR DEZSŐ: A színes fényképezésről 92; SZEKERES KÁLMÁN: A fotometriai egységekről 106; *Physikai Laboratórium* (ólomforrasztás, vezető üveg) 115.

#### Harmadik füzet.

KÜRSCHÁK JÓZSEF: A komplex változó gammafüggvényéről. (Első közlemény) 117; SKOPÁL ISTVÁN: Megfelelő háromszögek és tetraéderek polárterekben. (Második és befejező közlemény) 125; ZEMPLÉN GYÖZÖ: Elemi tétel az egész számok felbontásáról 135; KÁROLY IRÉN: A párák szerepe a koherer-jelenségeknél 138; DIETZ LAJOS: Telegrafálás elektromos ívfénnyel 141; KÖVESLIGETHY RADÓ: A Hold hegyeinek kísérleti utánzása. (Első közlemény) 147; *Megoldott feladatok* (Csillag Vilmos) 159; *Irodalom* (Róna Zsigmond, A légnyomás a m. birodalomban 1861—1890-ig. Ism. Steiner Lajos; Ostwalds' Klass. d. ex. Wiss. 59., 63., 70. Ism. Lakits Ferencz) 162.



**Negyedik füzet.**

KÜRSCHÁK JÓZSEF: A komplex változó gammafüggvényéről. (Második közlemény) 165; KLUG LIPÓT: Desmikus helyzetű tetraéder-rendszerek síkmetszései 175; KLUPATHY JENŐ: A kondenzátor hatása az elektrolytikus megszakítónál 191; SZEKERES KÁLMÁN: Fém-redukálás és izzítás alumíniummal 196; KÖVESLIGETHY RADÓ: A Hold hegyeinek kísérleti utánzása. (Második és befejező közlemény) 206; *A Matematikai és Fizikai Társulat VI. rendes közgyűlése* 214.

**Ötödik füzet.**

KOPP LAJOS: A másodrendű felületek osztályozása az  $n$ -dimenziós térben 223; JUCKEL GYULA: Adalék a kamatszámolás elméletéhez. (Első közlemény) 237; MIKOLA SÁNDOR: A légkör új gázairól 244; KÖVESLIGETHY RADÓ: A Föld alakjának és nagyságának egy helyből eszközölt holdmegfigyelések alapján való meghatározása 255; *Fizikai Laboratorium*. (A leydeni palack elektromossága; Bunsen-lámpára való állvány; Szekeres Kálmán) 268; *kitűzött feladatok* (Rados G. (33.), Kürschák J. (34.) és (35), Arany D. (36)) 269.

**Hatodik füzet.**

KÖNIG DÉNES: Két maximum-minimum problema elemi tárgyalása 271; JAKOBOVITS DÁNIEL: A háromszög oldalain emelt négyzetekről 275; *kitűzött feladatok*, helyesbítés (33)-hoz 280; JUCKEL GYULA: Adalék a kamatszámolás elméletéhez. (Második közlemény) 281; PÉCH ALADÁR: A testek halmazállapotairól. (Első közlemény) 295.

**Hetedik és nyolczadik füzet.**

KLUG LIPÓT: Desmikus rendszerek 327; BEKE MANÓ: Adalék a kapcsolástanhoz 350; CSORBA GYÖRGY: A partitio numerorum irodalma 352; KÜRSCHÁK JÓZSEF: A hatványsorok elméletéhez 367; PÉCH ALADÁR: A testek halmazállapotairól. (Második közlemény) 372; *Megoldott feladatok* (Breuer Mór, Szabó Péter) 413; *kitűzött feladatok* Kürschák J. (37) 419; *Értesítő a Math. és Phys. Társulat előadásairól* 420.

---



## NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ.

### Ismertető és önálló dolgozatok.

	Lap
BEKE MANÓ: Adalék a kapcsolástanhoz.....	350
CSEMEZ JÓZSEF: Az érintkezési elektromosság eredetéről (Christiansen után).....	34
CSORBA GYÖRGY: A partitio numerorum irodalma.....	352
DIETZ LAJOS: Telegrafálás elektromos ívfénnyel.....	141
ELLEND JÓZSEF: Villamos hullámhosszaság és törési mutató.....	29
JAKOBOVITS DANIEL: A háromszög oldalain emelt négyzetekről.....	275
JUCKEL GYULA: Adalék a kamatszámolás elméletéhez (Első közlemény).....	237
— Adalék a kamatszámolás elméletéhez (Második közlemény).....	281
KÁROLY IRÉN: A párák szerepe a koherer-jelenségeknel.....	138
KLUG LIPÓT: Észrevételek «Egy elemi geometriai tétel» című czikkeihez.....	71
— Desmikus helyzetű tetraéder-rendszerek síkmetszései.....	175
— Desmikus rendszerek.....	327
KLUPATHY JENŐ: Egy ívlámpa hatásfokáról.....	23
— A kondensator hatása az elektrolitikus megszakítónál.....	191
KOPP LAJOS: A másodrendű felületek osztályozása az $n$ dimenziós térben.....	223
KÖNIG DÉNES: Két maximum-minimum problema elemi tárgyalása.....	271
KÖVESLIGETHY RADÓ: A Hold hegyeinek kísérleti utánzása (Első közlemény).....	147
— A Hold hegyeinek kísérleti utánzása (Második és befejező közlemény).....	206
— A Föld alakjának és nagyságának egy helyből eszközölt holdmegfigyelések alapján való meghatározása.....	255
KÜBSCHÁK JÓZSEF: A valós számoknak raczionális törttekkel való megközelítéséről.....	10
— A komplex változó gammafüggvényéről (Első közlemény).....	117
— A komplex változó gammafüggvényéről (Második közlemény).....	165
— A hatványsorok elméletéhez.....	367
MIKOLA SÁNDOR: A légkör új gázairól.....	244
PÉCH ALADÁR: A testek halmazállapotairól (Első közlemény).....	295
— A testek halmazállapotairól (Második közlemény).....	372



	Lap
PEKÁR DEZSŐ: A színes fényképezésről .....	92
PERÉNYI KANDID: Egy elemi geometriai tétel .....	15
SKOPÁL ISTVÁN: Megfelelő háromszögek és tetraéderek polárterekben (Első közlemény) .....	1
— Megfelelő háromszögek és tetraéderek polárterekben (Második és befejező közlemény) .....	125
SZEKERES KÁLMÁN: A fotometriai egységekről .....	106
— Fémredukálás és izzítás alumíniummal .....	196
SZIJÁRTÓ MIKLÓS: Van der Waals megfélelkező állapotokra vonatkozó törvényének igazolása. Kritikus állandók meghatározása (Amagat után) .....	43
VISNYA ALADÁR: Az indukált helyettesítések elméletéhez .....	65
ZEMPLÉN GYÖZÖ: Elemi tétel az egész számok felosztásáról .....	135

### Physikai Laboratorium.

Ólomforrasztás .....	115
Vezető üveg .....	115
A leydeni palaczk elektromossága. Szekeres Kálmán .....	268
Bunsen-lámpára való állvány. Szekeres Kálmán .....	268

### Irodalom.

RÓNA ZSIGMOND: A légnyomás a m. birodalomban 1861—1890-ig. Ism. Steiner Lajos .....	162
Ostwalds' Klassiker der Exakten Wissenschaften. 59, 63, 70. Ism. Lakits Ferencz .....	163

### Kitűzött feladatok.

33-ik feladat Rados Gusztávtól .....	269
Helyesbítés a 33-ik feladathoz .....	280
34-ik feladat Kürschák Józseftől .....	269
35-ik feladat Kürschák Józseftől .....	270
36-ik feladat Arany Dánieltől .....	270

### Megoldott feladatok.

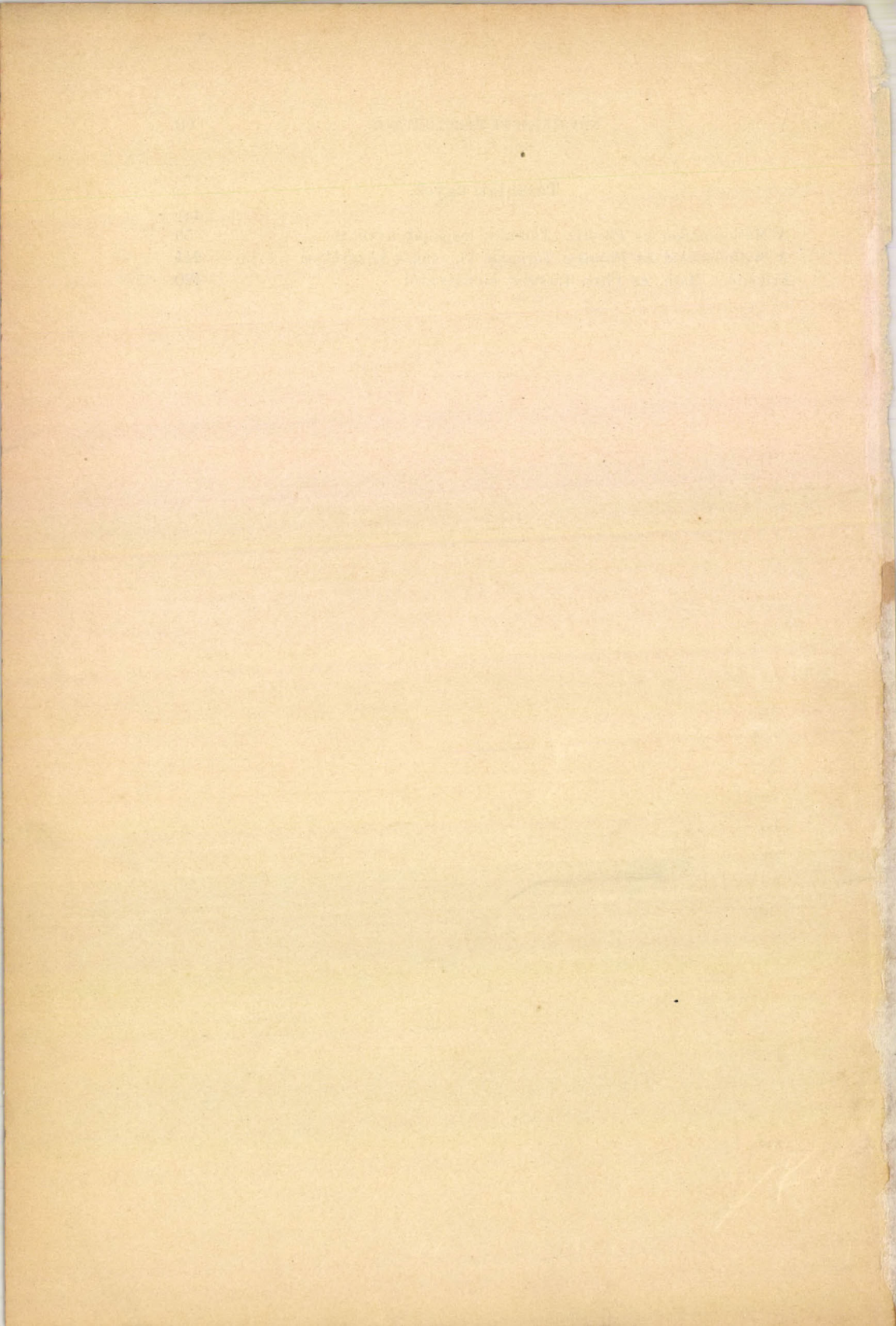
Breuer Mór megoldja a 26. feladatot .....	413
Csillag Vilmos „ a 26. „ .....	159
Doroghi Ignác „ a 25. „ .....	56
Lévay Ede „ a 25. „ .....	55
Péchy Aladár „ a 25. „ .....	57
Szabó Péter „ a 26. „ .....	417

**Társulati ügyek.**

	Lap
A Matematikai és Physikai Társulat tagjainak névsora	59
A Matematikai és Physikai Társulat VI. rendes közgyűlése	214
Értesítő a Math. és Phys. Társulat előadásairól	420

---





## MEGFELELŐ HÁROMSZÖGEK ÉS TETRAÉDEREK POLÁRTEREKBEN.

### I. Lineáris tetraéderekről.

(Első közlemény.)

Dr. VÁLYI GYULA úrtól a M. és Ph. Lapok harmadik évfolyamában «Desargues tantételének térbeli analogonjáról» cím alatt közölt cikknek a lineáris sugársorokról szóló részéből idézzük a következőket: \*

*« . . . ha négy egyenes lineáris sugársorhoz tartozik, de hármanként nem tartoznak síkbeli lineáris sugársorhoz, akkor a következő négy eset lehetséges:*

1. *A négy egyenes egy másodrendű és másodosztályú felületen fekszik, de kettőnként nem metszik egymást. (Hiperbolikus sugarak.)*

2. *A négy egyenes két szöget alkot külön szögponttal és síkkal, de olyan helyzetben, hogy egyiknek szögpontja a másiknak síkjában fekszik és viszont. (Kétszögös sugarak.)*

3. *A négy egyenesnek közös pontja van. (Pontbeli sugarak.)*

4. *A négy egyenesnek közös síkja van. (Síkbeli sugarak.)*

Ugyanazon cikknek a lineáris tetraéderekről szóló részéből pedig a következőket idézem:

*« . . . a lineáris viszonyoknak következő három faját kell megkülönböztetnünk:*

1. *Mind a megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek, mind a*

---

\* A M. és Ph. Lapok III. évfolyamának 269. lapjáról.



megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei hiperbolikus sugarak. (Hiperbolikus viszony.)

2. Mind a megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek, mind a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei kétszögös sugarak. (Kétszögös viszony.)

3. A megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek pontbeli, a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei síkbeli sugarak. (Perspektív viszony.)»

A jelen dolgozat első részének tárgya ez utóbb idézett osztályozásban implicite kimondott tételeknek, melyek a fentebb megnevezett dolgozatban analitikailag vannak tárgyalva, synthetikai bizonyítása.

1. Első sorban bebizonyítjuk a következő tételt:

*Ha két tetraéder megfelelő szögpontjait összekötő egyenesek hiperbolikus sugarak, úgy a megfelelő oldalsíkok metszései is azok.*

Nevezzük az első tetraéder szögpontjait  $A, B, C, D$ -nek, az ezekkel rendre szemben fekvő oldalsíkjaikat  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ -nak, hasonlóképp a második tetraéder megfelelő szögpontjait  $A_1, B_1, C_1, D_1$ -nek és oldalsíkjaikat  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ -nek.

Továbbá az  $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}, \overline{CC_1}, \overline{DD_1}$  egyeneseket  $p, q, r, s$ -nek; az  $\overline{\alpha\alpha_1}, \overline{\beta\beta_1}, \overline{\gamma\gamma_1}, \overline{\delta\delta_1}$  egyeneseket pedig  $p', q', r', s'$ -nek.

Feltételünk, hogy a  $p, q, r, s$  egyenesek hiperbolikus sugarak, azaz valamely  $H$  hiperbolikus hiperboloid vagy paraboloid egyik lineáris alkotósorába tartoznak.

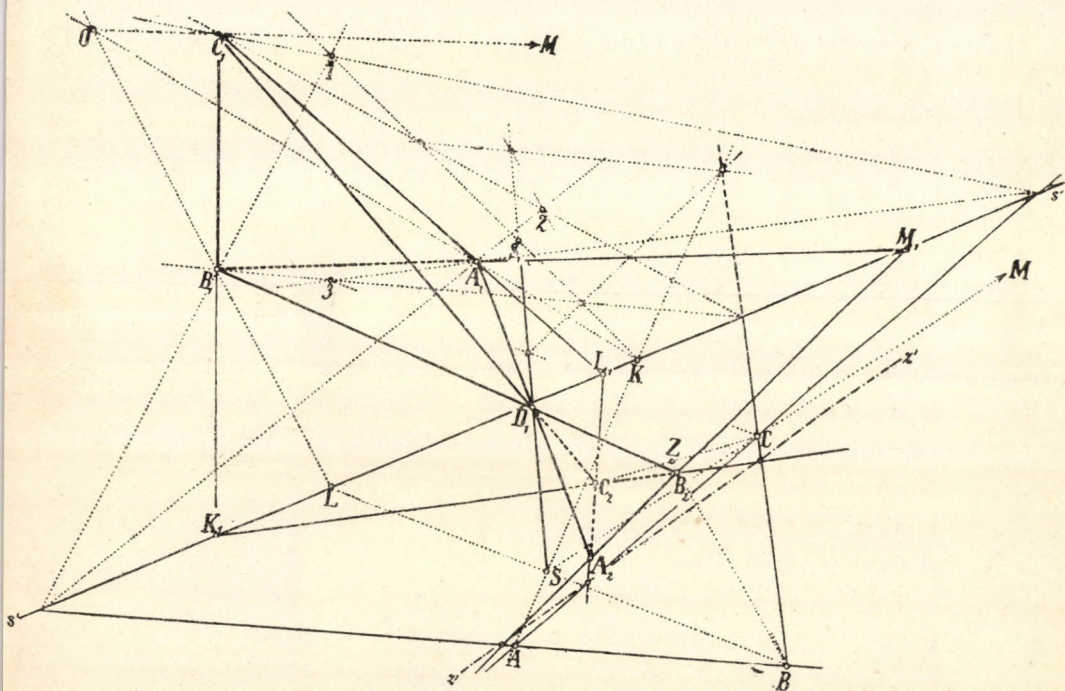
Állításunk, hogy a  $p', q', r', s'$  egyenesek szintén hiperbolikus sugarak, azaz egy  $H'$  hiperbolikus másodrendű felület egyik lineáris alkotósorába tartoznak.

Ugyanis kimutatjuk, hogy a két tetraéder mindenik oldalsíkjaiban van egy transversalisa ez utóbbi négy egyenesnek.

Vegyük pl. a  $\delta$  síkot, melyet az  $\alpha, \beta, \gamma$  síkok az  $ABC$  háromszög  $a, b, c$  oldalaiban, az  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  síkok pedig az  $A_2B_2C_2$  háromszög  $a_2, b_2, c_2$  oldalaiban metszenek. Ezen  $A_2B_2C_2$  háromszög vetülete az  $A_1B_1C_1$  háromszögnek a  $\delta$  síkra a  $D_1$  centrumból, más szóval e két háromszög perspektív; a perspektivitas tengelye a  $\overline{\delta\delta_1}$  azaz  $s$  egyenes.



De az  $ABC$  és  $A_2B_2C_2$  háromszögek is perspektívek. Mert, ha a  $D_1$  pontot a  $p, q, r$  egyenesekkel síkok által összekötöm, ezek a  $H$  felület egy  $z$  vezérsugarában találkoznak, tehát a  $\delta$  síkot egy  $Z$  sugársor három sugarában metszik, de ezek az  $AA_2, BB_2$  és  $CC_2$  egyenesek. Ennélfogva e háromszögek megfelelő oldalai egy  $z'$  egyenes pontjaiban találkoznak. E pontok azonban nem egyebek, mint  $p', q', r'$



nyomai a  $\delta$  síkon, melyben az  $s'$  benne lévén, a  $z'$  valóban e négy egyenes egy transversalisa.

E bizonyításunk értelmét veszti arra az esetre, midőn  $D_1$  a  $\delta$  síkba esik, mert ekkor

$$A_2 \equiv B_2 \equiv C_2 \equiv D_1$$

Ez esetben a következő, lényegileg szintén Desargues-féle tétel alkalmazható:



*Ha egy triéder és egy háromszög, melynek síkja a triéder szög-pontjában van, oly helyzetű, hogy a háromszög csúcsait a triéder megfelelő éleivel összekötő síkok egy egyenesben találkoznak, úgy a háromszög oldalainak és a triéder megfelelő lapjainak metszéspontjai szintén egy egyenesbe esnek.*

Legyenek a háromszög szögpontjai  $A, B, C$ , ezekkel szemben fekvő oldalai  $a, b, c$ ; a triéder élei  $a', b', c'$ , ezekkel szemben eső lapjai  $\alpha', \beta', \gamma'$ .

Feltételünk, hogy az  $[Aa'], [Bb'], [Cc']$  síkok egy  $z$  egyenesben találkoznak; állításunk, hogy az  $(aa'), (bb'), (cc')$  pontok szintén egy  $z'$  egyenesben fekszenek.

Vegyünk a  $z$  egyenesen egy tetszőleges a triéder csúcsától különböző  $Z$  pontot és ebből projiciáljuk az  $ABC$  háromszöget.

$\overline{ZA}$  metszi  $a'$ -t  $A'$

$\overline{ZB}$  „  $b'$ -t  $B'$

$\overline{ZC}$  „  $c'$ -t  $C'$  pontban.

Az  $ABC$  és  $A'B'C'$  háromszögek perspektívek, a perspektív tengely e két háromszög síkjának  $z'$  metszéspontja, a melyen a megfelelő oldalak metszéspontjai fekszenek; de ezek nem egyebek mint az  $(aa'), (bb'), (cc')$  pontok. Ugyanis  $\overline{B'C'}$ -ben van az  $a'$ ,  $\overline{C'A'}$  a  $\beta'$  és  $\overline{A'B'}$  a  $\gamma'$  síkban.

Tehát e specialis esetben is találunk a  $\delta$  síkban oly  $z'$  egyenest, mely a  $p', q', r', s'$  egyeneseket metszi.

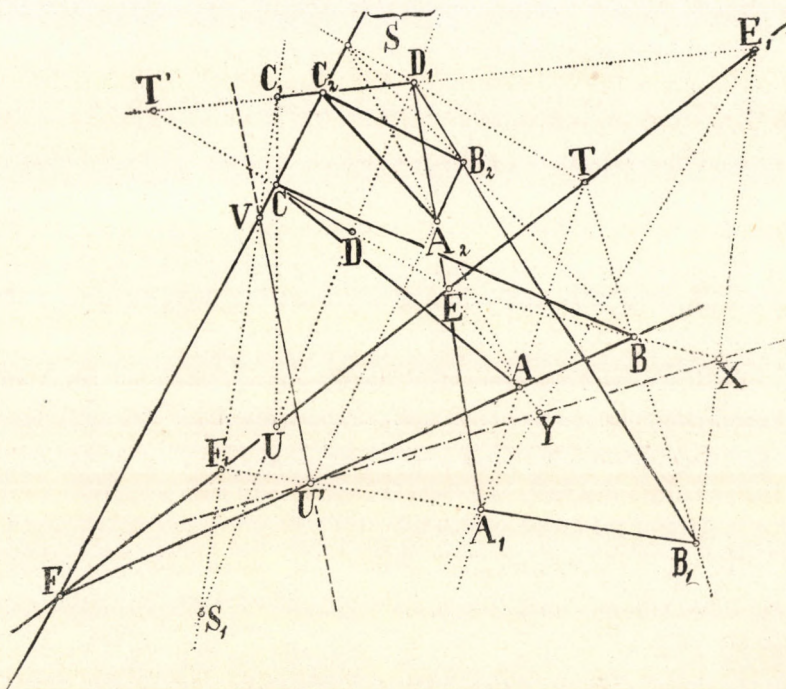
Minthogy pedig mindkét tetraéder mindenik oldalsíkjában ki-mutathatunk a fentebbi módokon egy-egy transversalist, a  $p', q', r', s'$  egyeneseknek tehát kettőnél több és így számtalan transversalisuk van. Ez csak úgy lehet, ha e négy egyenes

1. egy pontban,
2. egy síkban van,
3. oly két szöveget alkot, melyek közül bármelyiknek szögpontja a másiknak síkjába esik, végül
4. a négy egyenes egy hiperbolikus hiperboloid vagy paraboloid egyik alkotó sorába tartozik.



Az első eset lehetetlen, mert akkor a két tetraéder nyolcz oldal-síkja egy pontban volna.

A 2. és 3. eset szinte lehetetlen, mert akkor a két tetraédernek két, vagy három megfelelő élpárja közös ponttal bírna, miből az következne, hogy a  $p, q, r, s$  egyenesek is vagy mind egy pontban, vagy kettő-kettő egy pontban találkoznék.



Tehát csak az utolsó lehetőség marad fenn.

2. Ha két tetraéder oly helyzetű, hogy a megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek kétszögös sugarak, úgy a megfelelő oldal-síkok metszésvonalai is azok.

Az előbbi jelzéseket megtartva, feltételünket következőkbe foglaljuk: a  $p, q$ , egyenesek egy  $T$  pontban és  $\tau$  síkban, az  $r, s$  egyenesek egy  $U$  pontban  $\nu$  síkban vannak és a  $TU$  egyenes azonos a  $\tau\nu$  egyenessel.



Állítjuk, hogy  $p'$ ,  $q'$  egyenesek szintén egy  $T'$  pontban és  $\tau'$  síkban, az  $r'$ ,  $s'$  egyenesek egy  $U'$  pontban és  $\nu'$  síkban vannak és a  $T'U'$  egyenes összeesik a  $\tau'\nu'$  egyenessel.

Első sorban nyilvánvaló állításunk első része, mert az  $\overline{AB}$  és  $\overline{A_1B_1}$  élek a  $\tau$  síkban lévén egymást metszik, még pedig az  $U'$  pontban, ugyanis e pontban találkozáva a  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\gamma_1$ ,  $\delta_1$  síkok, ugyanebben metszik egymást az  $r'$ ,  $s'$  egyenesek is.

Hasonlóképp a  $\nu$  síkban fekvő  $\overline{CD}$  és  $\overline{C_1D_1}$  élek egymást a  $T'$  pontban metszik, mert e pontban van az  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  sík.

Hátra van még kimutatnunk, hogy  $\tau'$  sík az  $U'$  ponton és  $\nu'$  sík a  $T'$  ponton keresztül megy.

Jelöljük a  $\overline{CD}$ , illetőleg  $\overline{C_1D_1}$  élek a  $\overline{TU}$  egyenessel való metszéspontját  $E$ -vel, illetőleg  $E_1$ -gyel. Akkor  $\overline{AE}$ ,  $\overline{BE}$ ,  $\overline{A_1E_1}$ ,  $\overline{B_1E_1}$  egyenesek rendre a  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha_1$  síkok nyomai a  $\tau$  síkon. Így  $\overline{AE}$  és  $\overline{A_1E_1}$  egyenesek  $Y'$  metszéspontja a  $q'$  egyenesnek, a  $\overline{BE}$  és  $\overline{B_1E_1}$  egyenesnek  $X'$  metszéspontja pedig a  $p'$  nyoma, tehát  $\overline{X'Y'}$  a  $[p'q']$  azaz  $\tau'$  síknak nyoma a  $\tau$  síkon.

De  $U'$ ,  $X'$  és  $Y'$  pontok egy egyenesen vannak, mert az  $ABE$  háromszög perspektív az  $A_1B_1E_1$  háromszöggel a  $T$ -re, mint perspektív centrumra nézve. Tehát  $U'$  valóban ben fekszik a  $\tau'$  síkban. Hasonlóképp mutatható ki, hogy  $T'$  benne van az  $\nu'$  síkban.

### 3. A tétel harmadik része:

*Ha két tetraéder megfelelő szögpontjait összekötő egyenesek egy pontban vannak, úgy a megfelelő oldalsíkok metszésvonalai egy síkba esnek.*

Ez oly elemi és általánosan ismert, hogy bizonyításától felmentve érezzük magunkat.

## II. Polárterek megfelelő háromszögei és tetraéderei.

4. *Ha valamely síkbeli polárrendszerben a tetszőleges  $ABC$  háromszög  $a$ ,  $b$ ,  $c$  oldalainak  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  pontok felelnek meg, úgy az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszögek perspektívek.*

Első sorban nyilvánvaló, hogy az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  szögpontok polárisai a  $\overline{B_1C_1}$ ,  $\overline{C_1A_1}$ ,  $\overline{A_1B_1}$  azaz a szokásos jelzéssel, az  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  egyenesek.

Továbbá az  $\overline{AA_1}$  és  $\overline{BB_1}$  egyenesek  $D$  metszéspontjának polárisa az  $(aa_1)$  és  $(bb_1)$  pontokat összekötő  $d_1$  egyenes. Az itt egyesített síkrendszerek —  $\sigma$  és  $\sigma_1$  — projektivitását a következő symbolummal jellemzem:

$$(ABCDd_1 \dots) \overline{\wedge} (a_1b_1c_1d_1D \dots)$$

E rendszerekkel egyesítve gondolok egy  $\sigma_2$  síkrendszert, mely  $\sigma_1$ -gyel polárreciprok a következő képlet szerint:

$$(a_1b_1c_1d_1D \dots) \overline{\wedge} (A_1B_1C_1Dd_1 \dots)$$

E két képletből következik a harmadik:

$$(ABCDd_1 \dots) \overline{\wedge} (A_1B_1C_1Dd_1 \dots)$$

Azaz a  $\sigma$  és  $\sigma_2$  síkrendszerek is projectívek és pedig úgy, hogy a  $D$  pont és  $d_1$  egyenes önnönmagának felel meg.

Mivel pedig  $(ad_1)$  és  $(bd_1)$  pontoknak a velük összeeső  $(a_1d_1)$  illetve  $(b_1d_1)$  pontok, az  $\overline{AD}$  és  $\overline{BD}$  egyeneseknek a velük összeeső  $\overline{A_1D}$  illetve  $\overline{B_1D}$  egyenesek felelnek meg; nyilvánvaló, hogy az előbbi, önmaguknak megfelelő pontokat a  $D$ -vel összekötő egyenesek és az önmaguknak megfelelő  $\overline{AA_1}$  és  $\overline{BB_1}$  egyeneseknek a  $d_1$ -gyel való metszés pontjai is — tehát  $D$ -nek minden sugara és  $d_1$ -nek minden pontja — önmaguknak felelnek meg.

A  $\sigma$  és  $\sigma_2$  rendszerek ezek alapján perspektívek a  $D$  centrumra és  $d_1$  tengelyre nézve, a mivel a kimondott tétel be van bizonyítva.

Ha az  $ABC$  háromszög két oldala pl.  $a$  és  $b$  egymásnak konjugált, azaz  $A_1$  ráesik  $b$ -re és  $B_1$  ráesik  $a$ -ra, ez esetben  $D$  összeesik  $C$ -vel és  $d_1$  a  $c_1$ -gyel. Ha pedig  $A$  és  $B$  szögpontok konjugáltak, akkor  $D$  összeesik  $C_1$ -gyel és  $d_1$  a  $c$ -vel.

5. Ha valamely térbeli polárrendszerben az  $ABCD$  tetraéder  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  lapjainak az  $A_1, B_1, C_1, D_1$  pontok felelnek meg, úgy az  $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}, \overline{CC_1}, \overline{DD_1}$  egyenesek egy lineáris sugársorba tartoznak.\*

\* Lásd: «Dr. TEODOR REYE. Die Geometrie der Lage. Dritte vermehrte Auflage. Zweite Abtheilung.» 275. lapját.



Az előzőekben alkalmazott jelöléseket megtartva, bebizonyítandó, hogy a  $p, q, r, s$  egyenesek vagy *a)* hiperbolikus, vagy *b)* kétszögös, vagy *c)* egy pontbeli sugarak.

*a)* A  $\delta$  síkban, ha minden pontnak megfelelőül a konjugált egyenest veszem, egy polárrendszer áll elő, melyben az  $ABC$  háromszög szögpontjainak az  $A_2B_2C_2$  háromszög  $a_2, b_2, c_2$  oldalai felelnek meg, melyek az  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  síkok nyomai a  $\delta$  síkon. De akkor az előbbi tétel szerint  $ABC$  és  $A_2B_2C_2$  háromszögek perspektívek egy  $Z$  centrumra nézve.

Mint hogy  $A_2B_2C_2$  az  $A_1B_1C_1$  háromszög vetülete  $D_1$  pontból  $\delta$  síkra, ha a  $\overline{D_1Z}$  egyenest az  $A, B, C$  pontokkal síkok által összekötöm, ezek az  $A_1, B_1, C_1$  pontokon is áthaladnak és így a  $\overline{D_1Z}$  egyenes a  $p, q, r, s$  egyeneseknek egy transversalisa. Mivel végre mindenik tetraéder mindenik csúcsán át megy e négy egyenes egy transversalisa, a tétel be van bizonyítva.

*b)* A négy  $p, q, r, s$  egyenes közül kettő pl.  $p, q$  csak úgy metszheti egymást, ha  $\overline{AB}$  és  $\overline{A_1B_1}$  élek is metszik egymást. De akkor ezek polárisai  $\overline{C_1D_1}$  és  $\overline{CD}$  szintén metszik egymást, miből következik, hogy az  $r$  és  $s$  egyenesek is metszik egymást.

Még kimutatandó, hogy a  $(pq) \equiv T$  pont az  $[rs] \equiv v$  síkba és  $(rs) \equiv U'$  pont a  $[pq] \equiv \tau$  síkba esik.

A 2. ábrából leolvasható, hogy a  $\tau$  síkban levő polárreciprocitásban

$A$ pontnak megfelel az $\alpha_1$ sík	$\overline{B_1X'}$	egyenese
$A_1$	“ “ “ $a$ “	$\overline{BX'}$
$Y'$	“ “	$\overline{BB_1}$ egyenes.

Ugyanis  $Y'$  nem egyéb, mint a  $\beta$  és  $\beta_1$  sík metszésvonalának nyoma. Tehát az  $AA_1Y'$  háromszög perspektív a neki megfelelő  $BB_1X'$  háromszöghöz, így a megfelelő oldalak metszéspontjai egy egyenesbe esnek, e perspektív tengely pedig, mint nyilvánvaló, a  $\tau$  és  $v$  síkok metszésvonala. Egészen analog eljárással mutatható ki, hogy  $U$  pont is e két sík metszésvonalába esik.

Ez eset akkor áll be, ha pl.  $\overline{AB}$ -t a  $\overline{CD}$ -nek  $\overline{A_1B_1}$  polárisa metszi, azért:

*Ha az egyik tetraéder két szemben fekvő éle pl.  $\overline{AB}$  és  $\overline{CD}$  egymáshoz konjugált, úgy a két tetraéder kétszögös viszonyban van egymással.*

c) Ha végül  $\overline{AB}$  metszi az  $\overline{A_1B_1}$ -et és  $\overline{AC}$  az  $\overline{A_1C_1}$ -et, úgy egy szersmind a megfelelő polarisok is metszik egymást, azaz:

$$\overline{C_1D_1} \text{ metszi } \overline{CD}\text{-t és } \overline{B_1D_1} \text{ metszi } \overline{BD}\text{-t.}$$

De ekkor első sorban a  $p, q, r$  egyenesek, másodszorban a  $q, r, s$  egyenesek páronként metszik egymást, vagyis egy pontba futnak össze.

Tehát:

*ha az egyik tetraéder szemben fekvő élei közül két pár egymásnak konjugált, úgy a tetraéderek perspektívek és harmadik élparjuk is konjugált.*

Úgy a síkbeli, mint a térbeli polárrendszereknél figyelmen kívül hagytuk azon különös eseteket, melyeknél megfelelő szögpontok összeesnek.

*Skopál István.*



## A VALÓS SZÁMOKNAK RÁCZIONÁLIS TÖRTEKKEL VALÓ MEGKÖZELÍTÉSÉRŐL.

1. Egy adott  $a$  irráczionális valós számhoz végtelenül sok oly

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_m}{q_m}, \dots \quad (X)$$

ráczionális számokból alkotott sorozat található, hogy

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{p_m}{q_m} = a.$$

Pl.  $q_m$ -nek  $m$ -et választhatjuk, a

$$\frac{k_1}{1}, \frac{k_2}{2}, \dots, \frac{k_m}{m}, \dots \quad (Y)$$

számlálót pedig úgy állapíthatjuk meg, hogy  $\frac{k_m}{m}$  az  $m$  nevezőjű törtek közül az  $a$ -hoz értékére nézve legközelebb eső legyen.

Abban az esetben, midőn  $a$  oly *algebrai szám*, mely egy (ráczió-nális együtthatókkal bíró)  $n$ -ed fokú egyenletnek tesz eleget, akkor LIOUVILLE egyik tétele szerint *\* mindig található egy oly  $A$  pozitív szám, hogy  $a$  (X) sorozat minden tagjára vonatkozólag*

$$\left| \frac{p_m}{q_m} - a \right| > \frac{1}{Aq_m^n}.$$

Más-más módon képezvén az (X) sorozatot,  $A$  is változik. Jelöl-jük  $A$ -nak az (Y) sorozathoz tartozó értékét  $M$ -mel,  $\frac{p}{q}$  pedig je-

---

\* Bebizonyítását l. e lapok II. kötetének 382—384. lapján. Az idézett he-lyen a 382. lapon alulról a 9. sorban és a 384. lapon felülről a 9. sorban az egyenlőtlenség jele hibásan fordítva van nyomva.

lentsen egy tetszőleges ráczióális számot. Akkor (Y)-nak  $q$ -dik tagja vagy egyenlő  $\frac{p}{q}$ -val, vagy pedig jobban közelíti meg  $a$ -t, mint  $\frac{p}{q}$ . Azaz:

$$\left| \frac{p}{q} - a \right| \geq \frac{1}{Mq^n}.$$

LIIOUVILLE tétele tehát következöleg is fogalmazható :

*Ha  $a$  oly irrაციóális valós szám, mely egy  $n$ -ed fokú (és ráczióális együtthatókkal bíró) algebrai egyenletnek tesz eleget, akkor mindig található egy oly  $M$  pozitív szám, hogy bármely  $\frac{p}{q}$  ráczióális számra vonatkozólag*

$$\left| \frac{p}{q} - a \right| \geq \frac{1}{Mq^n}. \quad (1)$$

A következökben avval a kérdéssel foglalkozunk, *szabad-e* ezt a tételt következöleg megfordítanunk :

*Ha valamely  $a$  valós számhoz található egy oly  $M$  pozitív szám, hogy minden  $\frac{p}{q}$  ráczióális szám kielégíti az (1) alatti egyenlőtlenséget, akkor  $a$  oly algebrai szám, mely egy legfeljebb  $n$ -ed fokú egyenletnek tesz eleget.*

BOREL függvényteni felolvasásaiban kimutatta,\* hogy *e megfordítás hamis*. Bebizonyítása, melyet ismertetek, a láncztörtek elméletének és a számsokaságok elméletének néhány általánosan ismeretes tételén alapszik.

2. Legyen

$$a = q_0 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \dots$$

egy végtelen közönséges láncztört, vagyis  $q_0$  egész szám és a

$$q_1, q_2, \dots, q_m, \dots$$

\* BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris, Gauthier-Villars, 1898.



u. n. hányadosok pozitív egész számok. A közeledő törték le-  
gyenek:

$$\frac{S_1}{N_1} = \frac{q_0}{1}, \quad \frac{S_2}{N_2} = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_1 q_0 + 1}{q_1}, \quad \dots, \quad \frac{S_m}{N_m}, \quad \dots$$

Ezek felváltva kisebb ill. nagyobbak  $\alpha$ -nál. Tehát

$$\frac{S_m}{N_m} \quad \text{és} \quad \frac{S_{m+2}}{N_{m+2}}$$

egyformán vannak  $\alpha$ -hoz képest elhelyezve.

Vagyis

$$\left| \frac{S_m}{N_m} - \frac{S_{m+2}}{N_{m+2}} \right| < \left| \frac{S_m}{N_m} - \alpha \right|.$$

Innen

$$\left| \frac{S_m N_{m+2} - N_m S_{m+2}}{N_m N_{m+2}} \right| < \left| \frac{S_m}{N_m} - \alpha \right|,$$

és mivel a baloldal számlálója pozitív egész szám, azért

$$\frac{1}{N_m N_{m+2}} < \left| \frac{S_m}{N_m} - \alpha \right|.$$

Továbbá ismeretes, hogy

$$N_{m+1} = q_m N_m + N_{m-1} < (q_m + 1) N_m,$$

$$N_{m+2} = q_{m+1} N_{m+1} + N_m < (q_m q_{m+1} + q_{m+1} + 1) N_m.$$

Tehát

$$\left| \frac{S_m}{N_m} - \alpha \right| > \frac{1}{(q_m q_{m+1} + q_{m+1} + 1) N_m^2}. \quad (2)$$

3. Ezt tudván, vizsgáljuk meg azokat az  $\alpha$  láncztörteket, melyekben  $q_0$  tetszőleges, ellenben a többi hányados úgy választandó, hogy

$$1 \leq q_m \leq 10, \\ (m=1, 2, 3, \dots)$$

továbbá, hogy a  $q_m$ -ek közül végtelenül sok nagyobb az egységnél.

Ha adva van egy ily  $\alpha$  láncztört és ha  $\frac{a}{b}$  ráczionális szám,  $m$ -et pedig úgy választjuk, hogy

$$N_m > b \geq N_{m-1},$$

akkor

$$N_m < (q_{m-1} + 1) N_{m-1} \leq 11b$$

és

$$q_m q_{m+1} + q_{m+1} + 1 < 111 < 11^2.$$

Tehát

$$\left| \frac{a}{b} - a \right| > \frac{1}{Mb^2}, \quad (3)$$

hol

$$M = 11^4.$$

Tehát ha LIOUVILLE tételének szóban forgó megfordítása helyes volna, akkor a vizsgált láncztörtek mindannyian algebrai számokat ábrázolnának, még pedig másodfokú egyenletek gyökeit.

Ámde ez nincs így; sőt a vizsgált láncztörtek között, mint rögtön látni fogjuk, végtelenül sok *transzczendes szám* van.

4. Ismeretes, hogy az *algebrai* számok összessége *megszámlálható sokaság*ot képez. Ellenben a *valós számoknak bármely megszámlálható sokasága soha sem meríti ki a valós számok összességét*.\*

A mi most már a 3. alatt vizsgált láncztörteket illeti, úgy azok sokasága egyenlő *hatványú* a valós számok összességével. Vagyis a vizsgált láncztörtek összessége és a valós számok összessége kölcsönösen egyértelműen vonatkoztatható egymásra.

Ugyanis minden  $\beta$  valós szám egy és csakis egy módon fejezhető ki a

$$\beta = q_0 - 1 + \frac{q_1 - 1}{10} + \frac{q_2 - 1}{10^2} + \dots + \frac{q_m - 1}{10^m} + \dots$$

alakban, hol a  $q_0$  egész szám tetszőleges, a többi  $q_m$  ellenben a

$$0 \leq q_m - 1 \leq 9$$

egyenlőtlenségnek megfelelően választandó, végre a  $(q_m - 1)$ -ek közül végtelenül sok nagyobb a zérusnál. Ez nem egyéb mint  $\beta$ -nak *végtelen tizedes tört* alakja. (Ennek képezésénél az egész számokat és *véges tizedes törteket* a

$$0.5 = 0.4999 \dots$$

mintájára alakítjuk át végtelen tizedes törtekké.)

\* L. például KÖNIG, Analízis I. kötet 164—169. lap.



Ha most a vizsgált láncztörtek közül mindegyik  $\alpha$ -nak azt a  $\beta$  tizedes törtet mondjuk megfelelőnek, melyben a  $q$ -k ugyanazok, akkor láncztörtjeinket és a valós számok összességét valóban kölcsönösen egyértelműen vonatkoztattuk egymásra.

Ennélfogva az  $\alpha$ -k összessége nem meríthető ki egy megszámlálható sokaságból vett számok által. Vagyis az  $\alpha$ -k közt valóban kell *transzczendenseknek* is lenniök.

Kürschák József.

## EGY ELEMI GEOMETRIAI TÉTEL.

A Mathematikai és Physikai Lapok m. é. februáriusi számában ily czímmel jelent meg BEKE MANÓ tanár úrtól egy dolgozat. A jelen közlemény e tételnek ábrázoló geometriai bebizonyítását adja a tételben definiált sokszögek területének kiszámításával. A tétel a következő:

Ha az  $ABC$  háromszög hasonló  $A'_{12}B'_{12}C'_{12}$  háromszöghöz, akkor bármilyen két egymásra merőleges egyenes legyen is  $q$  és  $q_n$ , ha

$$\begin{array}{llllll} AQ \text{ és } A'_{12}Q_n \text{ metszete } A'_1; & \text{és } AQ_n \text{ és } A'_{12}Q \text{ metszése } A''_2 \\ BQ \text{ „ } B'_{12}Q_n & \text{„ } B'_1; & \text{„ } BQ_n \text{ „ } B'_{12}Q & \text{„ } B''_2 \\ CQ \text{ „ } C'_{12}Q_n & \text{„ } C'_1; & \text{„ } CQ_n \text{ „ } C'_{12}Q & \text{„ } C''_2, \end{array}$$

a hol  $Q$  és  $Q_n$  a  $q$  illetve  $q_n$  végtelenben gondolt pontjai, — az  $A'_1B'_1C'_1$  háromszög területe egyenlő  $A''_2B''_2C''_2$  területével, az előjeltől eltekintve.

Ha  $x_{12} \parallel q$  és  $x_{13} \parallel q_n$ , akkor az  $A'_1B'_1C'_1$  és  $A''_1B''_1C''_1$  háromszögek úgy foghatók fel, mint egy térbeli  $A_1B_1C_1$  háromszög első és második derékszögű képei két egymásra merőleges képsíkon, ha a vetítés tengely  $x_{12}$ . Hasonlókép első és harmadik képei az  $A'_2B'_2C'_2$  és  $A''_2B''_2C''_2$  háromszögek egy  $A_2B_2C_2$  háromszögnek, ha a vetítéstengely  $x_{13}$ .

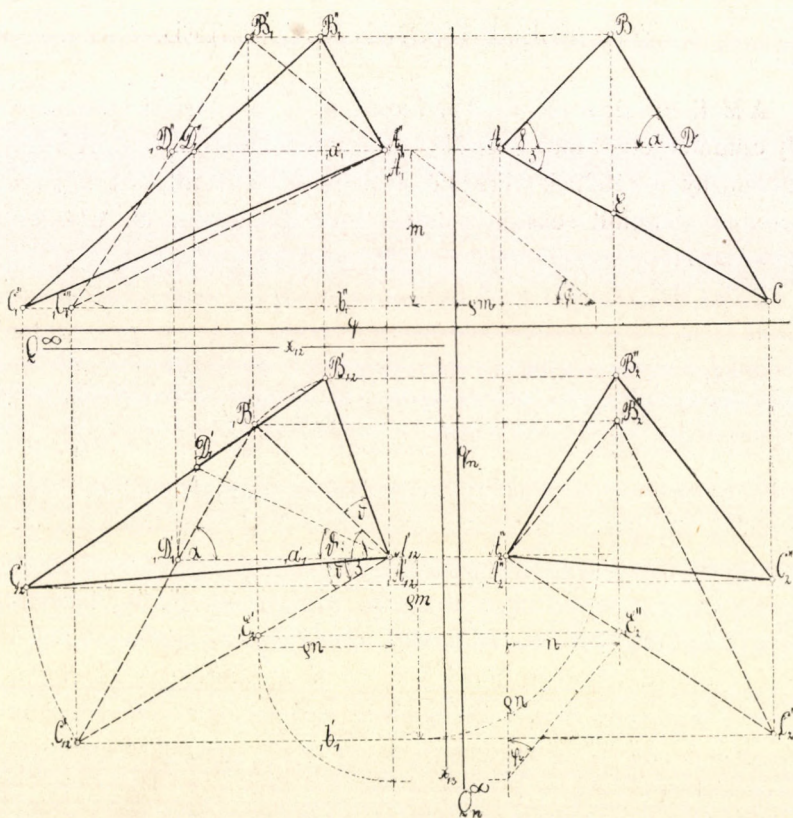
Minthogy az  $A'_1B'_1C'_1$  és  $A'_2B'_2C'_2$  pontok párjával összeesnek, azért az összeeső pontokat közös betűkkel  $A'_{12}B'_{12}C'_{12}$ , jelöljük.

Legyen az  $ABC$  háromszög területe  $T$ ,

$$\begin{array}{llll} \text{„ } A'_{12}B'_{12}C'_{12} & \text{„} & \text{„} & T'_{12}, \\ \text{„ } A_1B_1C_1 & \text{„} & \text{„} & T_1, \\ \text{„ } A_2B_2C_2 & \text{„} & \text{„} & T_2, \\ \text{„ } A''_1B''_1C''_1 & \text{„} & \text{„} & T''_1, \\ \text{„ } A''_2B''_2C''_2 & \text{„} & \text{„} & T''_2. \end{array}$$



Tételünk be lesz bizonyítva, ha sikerül kimutatnunk, hogy az  $A_1B_1C_1$  és  $A_2B_2C_2$  háromszögek síkjainak első képsíkszöge egyenlő, továbbá, hogy az  $A_1B_1C_1$  síkjának második képsíkszöge egyenlő az  $A_2B_2C_2$  síkjának harmadik képsíkszögével. Legyen ugyanis az



$A_1B_1C_1$  háromszög síkjának első és második képsíkszöge  $\varphi_1$  illetve  $\psi_1$ , az  $A_2B_2C_2$  síkjának első és harmadik képsíkszöge  $\varphi_2$  illetve  $\psi_2$ . Akkor

$$\begin{aligned} T'_{12} &= T_1 \cos \varphi_1, \\ T'_{12} &= T_2 \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad 1)$$

Ha most

$$\varphi_1 = \varphi_2,$$

akkor

$$T_1 = T_2.$$

Továbbá

$$\begin{aligned} T_1'' &= T_1 \cos \phi_1, \\ T_2'' &= T_2 \cos \phi_2. \end{aligned} \quad 2)$$

Minthogy

$$T_1 = T_2,$$

ha még

$$\phi_1 = \phi_2,$$

akkor

$$T_1'' = T_2''. \quad 3)$$

Minthogy  $\varphi_1$  és  $\varphi_2$  továbbá  $\phi_1$  és  $\phi_2$  nem egyenlők mindig egymással, hanem lehetséges, hogy egymástól  $\pi$  többszörösével különböznek, azért  $T_1''$  és  $T_2''$  között előjelbeli különbség lehetséges.

Be kell tehát bizonyítanunk, hogy  $\varphi_1 = \varphi_2$  és hogy  $\phi_1 = \phi_2$ .

Forgassuk el az  $A_1 B_1 C_1$  háromszöget egy az első képsíkra merőleges és az  $A_1$  ponton átmenő forgás-tengely körül addig, míg síkja az  $x_{12}$  vetítéstengellyel parallel lesz. A forgatást úgy végezzük, hogy az  $A_1 B_1 C_1$  síkjának  $A_1 D_2$  fővonalát forgatjuk, míg két képe parallel lesz a vetítés tengellyel. Legyen az elforgatás szöge  $\vartheta$ . Az elforgatott háromszög legyen  ${}_1 A_1 {}_1 B_1 {}_1 C_1$ . Hasonlókép jelöljük a megfelelő területeket is  ${}_1 T_1, {}_1 T_{12}, {}_1 T_{11}'$ -el. Világos, hogy  ${}_1 T_{11}' = T_1'$ . A  $q$ , illetve  $q_n$  irányú parallel vetítésből következik, hogy

$${}_1 A'_{12} {}_1 B'_{12} : {}_1 B'_{12} {}_1 D'_1 = {}_1 A'_{11} {}_1 B'_{11} : {}_1 B'_{11} {}_1 D'_1 = AB : BD.$$

Ha most még meggondoljuk, hogy  $ABD$  szög egyenlő  ${}_1 A'_{12} {}_1 B'_{12} {}_1 C'_{12}$  szöggel, következik, hogy

$${}_1 A'_{12} {}_1 B'_{12} {}_1 D'_{12} \triangle \sim ABD \triangle.$$

Hasonlókép bizonyítható be, hogy

$${}_1 A'_{12} {}_1 D'_{12} {}_1 C'_1 \triangle \sim ADC \triangle.$$

Továbbá mivel

$${}_1 A'_{12} {}_1 D'_1 \parallel AD \parallel q,$$

következik, hogy az  ${}_1 A'_{12} {}_1 B'_{12} {}_1 C'_{12}$  háromszög oldalai ugyanakkora szöget zárnak be a  $q$  egyenessel, mint az  $ABC$  háromszög megfelelő oldalai.  $\vartheta$  tehát az a szög, a melylyel el kell fordítanom az



adott hasonló háromszögek egyikét, míg oldalai ugyanazon szögeket zárják be a  $q$  és  $q_n$  egyenesekkel, mint a másik háromszög megfelelő oldalai.

Határozzuk most meg a  $\varphi_1$  szöget. Legyen az  ${}_1A_1{}_1B_1{}_1C_1$  háromszög síkjának két a vetítéstengelylyel parallel egyenese  ${}_1a_1$  és  ${}_1b_1$ . Ha a két második képnek egymástól való távolsága  $m$ , akkor a két első képnek egymástól való távolsága  $\rho m$ , a hol  $\rho = \frac{{}_1A'_{12}{}_1C'_{12}}{AC}$ . Ez a következőképen igazolható: Minthogy az  ${}_1A'_{12}{}_1C'_{12}$  ugyanazon  $\beta$  szöget zárja be a  $q$ -al, mint  $AC$

$$\rho m : {}_1A'_{12}{}_1C'_{12} = m : AC$$

$$\frac{\rho m}{m} = \frac{{}_1A'_{12}{}_1C'_{12}}{AC} = \rho$$

$$\rho = \rho.$$

A  $\varphi_1$  szöget meghatározó derékszögű háromszög egyik befogója tehát  $m$ , a másik  $\rho m$ , úgy, hogy

$$\cotg. \varphi_1 = \rho.$$

Erdekes, hogy  $\varphi_1$  nem függ sem a  $q$  és  $q_n$  irányától, sem az adott két hasonló háromszög kölcsönös helyzetétől.

Forgassuk most el az  $A_2B_2C_2$  háromszöget is ugyanazzal a  $\vartheta$  szöggel ugyanabban az értelemben, úgy, hogy első képe  ${}_1A'_2{}_1B'_2{}_1C'_2$  essék rá  ${}_1A'_1{}_1B'_1{}_1C'_1$ -re. Azt állítjuk, hogy ebben az elforgatott helyzetben  ${}_1A_2{}_1B_2{}_1C_2$  síkja is parallel az  $x_{13}$  vetítéstengelylyel. Bebizonyítható ugyanis, hogy van egy egyenese  ${}_1B_2{}_1E_2$ , a mely parallel  $x_{13}$ -al, minthogy két képe parallel vele. Minthogy az  ${}_1A'_{12}{}_1B'_{12}{}_1C'_{12}$  oldalai ugyanazon szöget zárják be a  $q_n$ -el, mint az  $ABC$  háromszög megfelelő oldalai, következik, hogy ha  $BE \parallel {}_1B'_{12}{}_1E'_2 \parallel q_n$

$$ABE \triangle \sim {}_1A'_{12}{}_1B'_{12}{}_1E'_2 \triangle$$

$$BCE \triangle \sim {}_1B'_{12}{}_1C'_{12}{}_1E'_2 \triangle.$$

És innét

$$AE : EC = {}_1A'_{12}{}_1E'_2 : {}_1E'_2{}_1C'_{12}. \quad (a)$$

Más oldalról vetítsük az  $E$  pontot parallel  $x_{13}$ -al az  ${}_1A''_2{}_1C''_2$  egyenesre, és az itt kapott  ${}_1E'''_2$ -t parallel  $x_{12}$ -el az  ${}_1A'_{12}{}_1C'_{12}$ -re. Az itt

nyert pont legyen  $X$ . Akkor ezen parallel vetítésből következik:

$$AE:EC = {}_1A_2''':{}_1E_2''':{}_1E_2''':{}_1C_2''':{}_1A_1':{}_1X:{}_1X:{}_1C_1' \quad (\beta)$$

( $\alpha$ ) és ( $\beta$ ) csak úgy állhat fenn, ha

$$X \equiv {}_1E_2'.$$

Az  ${}_1E_2'$  és  ${}_1E_2''$  tehát mint egy pont két képe felel meg egymásnak. De ha ez áll, akkor a  ${}_1B_2{}_1E_2$  egyenese az  ${}_1A_2{}_1B_2{}_1C_2$  háromszögnek tényleg parallel az  $x_{13}$  tengelylyel. Minthogy úgy az  $A_1B_1C_1$  háromszöget, valamint az  $A_2B_2C_2$  háromszöget  $\vartheta$  szöggel kellett elfordítanunk, hogy parallel legyen az  $x_{12}$ , illetve  $x_{13}$  vetítés tengelylyel, következik, hogy úgy az  $A_1B_1C_1$  síkjának, valamint az  $A_2B_2C_2$  síkjának első nyomvonala  $\vartheta$  szöget képez az  $x_{12}$ , illetve  $x_{13}$  vetítéstengelylyel.

Határozzuk meg az  $A_2B_2C_2$  síkjának első képsíkszögét. A  $\varphi_1$  meghatározásához egészen analóg okoskodás adja, hogy

$$\begin{aligned} \cotg \varphi_2 &= \rho \\ \cotg \varphi_1 &= \cotg \varphi_2. \end{aligned}$$

És innen

$$\varphi_1 = \varphi_2 + k.$$

Különben ez természetes is, mert mint láttuk  $\varphi_1$  független a  $q$  irányától.

Be lévén bizonyítva, hogy  $\varphi_1 = \varphi_2$  bizonyítsuk be, hogy  $\psi_1 = \psi_2$ . E bizonyítás alapjául azon triéder szolgál, a melynek egyik lapja az  $A_1B_1C_1$  síkja, másik lapja az első képsík, harmadik lapja a második képsík. E triéderben ismeretes adatok:  $\vartheta$ ,  $\varphi_1$  és a két képsík szöge, mely  $90^\circ$ . A gömbháromszögtan tanítja, hogy

$$\cos \psi_1 = \sin \varphi_1 \cos \vartheta. \quad 4)$$

Az  $A_2B_2C_2$  síkja, az első és harmadik képsík alkotta triéder alapján

$$\cos \psi_2 = \sin \varphi_2 \cos \vartheta.$$

Minthogy

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 + k\pi, \\ \psi_1 &= \psi_2 + k'\pi, \end{aligned}$$

a hol  $k$  és  $k'$  egész számot jelent.



Ezzel kimondott tételünk be van bizonyítva, egyúttal kijelelve az út, a melyen haladva a  $T_1''$  és  $T_2'''$  területeket kiszámíthatjuk.

Az 1) szerint :

$$T_{12}' = T_1 \cos \varphi_1.$$

Hasonló megfontolás szerint :

$${}_1T_1'' = T_1 \sin \varphi_1. \quad 5)$$

A kettőt egymással osztva :

$$\frac{T_{12}'}{{}_1T_1''} = \cotg \varphi_1 = \rho$$

$${}_1T_1'' = \frac{T_{12}'}{\rho}.$$

Hasonlóképp :

$${}_1T_2''' = \frac{T_{12}'}{\rho}.$$

A kettő szorzata

$${}_1T_1'' {}_1T_2''' = \frac{T_{12}'^2}{\rho^2} = {}_1T_1''^2 = {}_1T_2'''^2.$$

Minthogy

$$T_{12}' = \rho^2 T,$$

$${}_1T_1''^2 = {}_1T_2'''^2 = TT_{12}'.$$

Vagyis a  ${}_1T_1''$  és  ${}_1T_2'''$  mértani középarányosa a  $T$  és  $T_{12}'$ -nek.

A 2) szerint felhasználván a 4)-t és 5)-t

$$T_1'' = T_1 \cos \phi_1 = T_1 \sin \varphi_1 \cos \vartheta = {}_1T_1'' \cos \vartheta = \sqrt{T_{12}' T} \cos \vartheta$$

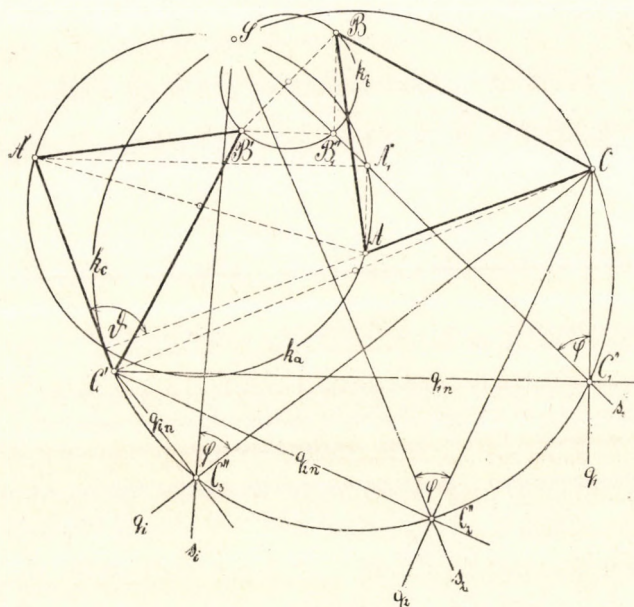
$$T_2''' = T_2 \cos \phi_2 = T_2 \sin \varphi_2 \cos \vartheta = {}_1T_2''' \cos \vartheta = \sqrt{T_{12}' T} \cos \vartheta.$$

Ez a képlet adja  $T_1''$  és  $T_2'''$  kiszámított értékét. *E szerint  $T_1''$  és  $T_2'''$ , vagyis a szerkesztett két háromszög területe egyenlő az adott két hasonló háromszög területének mértani középarányosával, szorozva azon szög cos-ával, a melylyel el kell fordítanunk az egyik háromszöget, hogy oldalai ugyanazt a szöveget képezzék a vetítési irányokkal, mint a másik háromszög megfelelő oldalai. Itt azonban nem lehet eldönteni, hogy a négyzetgyök milyen előjellel veendő, de ha összeszorozzuk ezen két utolsó képletet, kapjuk, hogy*

$$T_1'' T_2''' = T_{12} T \cos^2 \vartheta.$$

Minthogy itt  $\cos^2 \vartheta$  mindig pozitív következik, hogy  $T_1''$  és  $T_2'''$  megegyező, vagy ellenkező előjelűek a szerint, a mint  $T$  és  $T_{12}$  megegyező vagy ellenkező előjelűek.

Ha az  $ABC$  és  $A'_{12}B'_{12}C'_{12}$  hasonló háromszögek ugyanazon körülírásúak, akkor, ha az egyiket elforgatjuk úgy, hogy a kettő-



nek megfelelő oldalai párhuzamosak legyenek, akkor a két háromszög megfelelő oldalai bármely két egymásra merőleges egyenesre nézve tehát az elforgatás szöge  $\vartheta$  ugyanaz. Minthogy pedig  $T_1''$  és  $T_2'''$  az adott két háromszög területén kívül csak  $\vartheta$ -tól függ, — következik, hogy ezen esetben  $T_1''$  és  $T_2'''$  nem függ a  $q$  és  $q_n$  választásától.

Ha azonban a két hasonló háromszög értelme nem egyezik meg, akkor minden  $q$ -hoz külön  $\vartheta$  tartozván, a  $T_1''$  és  $T_2'''$  területek függenek a  $q$  és  $q_n$  merőlegesek választásától.



A második ábrán csak egy térbeli háromszöggel foglalkozván, a betűknek most már feleslegessé vált indexeit elhagyjuk.

Legyenek az  $ABC$  és  $A'B'C'$  háromszögek olyanok, hogy megfelelő oldalaik egymásra merőlegesek. A két háromszög hasonló és ugyanazon körülírású.  $\vartheta = 90^\circ$

$$T'' = \sqrt{TT'} \cos \vartheta = 0.$$

Ez azt mondja, hogy  $A''B''C''$  pontok egy egyenesen fekszenek, mert a térbeli háromszög síkja második vetítő sík. Első képsík szöge tehát,  $\varphi$ , közvetetlenül látható. Változtassuk most a  $q$  és  $q_n$  egyenesek irányát és tegyük át őket a  $C$ , illetve  $C'$  pontokon. A  $q_1$  és  $q_{1n}$  esetén legyen  $s_1$  a mértani helye az  $A_1'B_1'C_1'$  pontoknak. A  $q_2$  és  $q_{2n}$  esetén  $s_2$  é. i. t. Ha a  $q_i$  és  $q_{in}$  metszéspontja  $C_i''$ , akkor  $C_i''$  mindig a  $C$  és  $C'$ , mint átmérő felett rajzolt körön fekszik. Az  $s_i$  és  $q_i$  mindig ugyanazon  $\varphi$  szöget zárják be, még pedig ugyanazon értelemben. Tehát a  $q_i$  és  $s_i$  mindig ugyanazon ívet metszik ki a  $CC'$  felett rajzolt  $k_c$  körből, még pedig ugyanazon értelemben. Minthogy  $q_i$  mindig a  $C$  ponton megy át, következik, hogy  $s_i$  mindig ugyanazon  $S$  pontot metszi ki a  $k_c$  körből. Mi azonban  $C$  és  $C'$  pontok helyett ugyanazon joggal az  $A$  és  $A'$ , vagy  $B$  és  $B'$  pontokat is választhattuk volna a  $q_i$  és  $q_{in}$  sugarak alkotta sugársorok sorozójául. Ha tehát az  $AA'$  és  $BB'$  felett mint átmérők felett rajzolt körök  $k_a$  és  $k_b$ , akkor az  $s_i$  egyenesek ezen köröket is egy pontban metszik. Ez azonban csak úgy lehetséges, ha  $S$  ezen körökön is rajta van. Az  $s_i$  egyenesek, tehát sugársort alkotnak, melynek sorozója a  $k_a$ ,  $k_b$  és  $k_c$  körök közös metszéspontja.

*Ha tehát  $ABC$  és  $A'B'C'$  háromszögek megfelelő oldalai egymásra merőlegesek, akkor a tételben definiált módon szerkesztett  $A''B''C''$  pontok egy egyenesen fekszenek, az  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  mérőjű között pedig egy ponton mennek át.*

Az egész tétel általánosítható hasonló sokszögekre.

*Perényi Kandid.*



## EGY ÍVLÁMPA HATÁSFOKÁRÓL.

A «Math. és Physikai Lapok» 1896. évi folyamában új szerkezetű ívlámpát írtam le, mely különösen vetítő eszközök s fényvetők számára alkalmas. Abban a közleményben a lámpa effektusára vonatkozólag csak közelítő mérésekre hivatkozhattam. A múlt évben Londonban időzésem alkalmával közöltem lámpám tervét W. E. AYRTON tanárral (Central Technical College), a ki érdeklődött iránta s felajánlotta, hogy tegyek vele méréseket az ő laboratoriumában. Az ő szivességéből azután J. MATHER-rel, a laboratorium vezetőjével méréseket végeztünk, melyeknek eredményéről számolok be e közleményben.

Már az első publikáló előadásomban említettem, hogy a pozitív szén elégeése a vízszintes helyzet folytán nem történik symmetrikusan, úgy hogy gondoskodni kell — esetleg a forgatása által — annak egyenletessé tételéről. Azért a kísérleteket annak a megvizsgálására is irányultak, hogy a szénnek forgatása mily módon befolyásolja a lámpa hatásfokát.

A következő kísérletekben a fényerősség mérésére BRODHUN-LUMMER-féle fotometert és angol normál gyertyaegységet (C. P.) használtunk s csak a vízszintes irányba (a pozitív szén iránya) eső megvilágítást néztük, miután előbb meggyőződünk, hogy ebbe esik a maximális megvilágítás.

I. *Mindkét szén nyugalomban, a pozitív vízszintes, a két szén által képezett szög változó.* Az adatok minden szögre több mérés középértékeit tartalmazzák.



Hajlás- szög	Amp.	Volt.	Watt.	Vörös C. P.	Zöld C. P.	Fehér C. P.	Fehér C. P. per Watt.
100°	12	50·1	601·2	1761	4470	3115·5	5·17
110°	11·9	49·4	587	1623	4414	3018·5	5·13
120°	12	50·6	608	1777	4513	3145	5·19
130°	12	50·2	602·4	1443	3556	2499·5	4·17

E mérések közben is tapasztaltuk, hogy a pozitív szén mihamar ferdén égett le, a mi által a világítási maximum iránya a horizontálisból lefelé hajlott a negatív mögé. Hogy a pozitív szén egyenletesen égjen, megkísérlettük azt forgatni egy motor segítségével.

II. A pozitív szén horizontális tengelye körül forog, egy fordulat ideje  $1\frac{1}{4}$  percz. A két szén által képezett hajlásszög ismét változó. A mérések eredményei a következő táblázatban vannak összeállítva, a második sorban meg van jelölve, hogy egy adat hány mérés középértéke.

Hajlásszög	Adatok száma	Amp.	Volt.	Watt.	Zöld C. P.	C. P. per Watt.	Amp.	Volt.	Watt.	Vörös C. P.	C. P. per Watt.	Fehér C. P. per Watt.
90°	2	12	50	600	3960	6·6	12	50	600	1530	2·64	4·62*
100°	22	12	50·5	606	3553	5·87	12	50·5	606	1542	2·55	4·21
110°	19	12	49·25	592	3001	5·09	11·9	49·4	588	1317	2·24	3·66
120°	10	12	50·8	610	3051	5·0	12	50·6	607	1333	2·29	3·65
130°	10	12	50	600	3000	5·0	12	50·8	610	992	1·63	3·32
140°	20	12	49·8	598	2660	4·45	12	49·9	600	1004	1·67	3·06
150°	14	12	50	600	2529	4·22	12	50·3	605	999	1·64	2·93
160°	18	12	51	612	3496	5·65	12	51·6	620	1297	2·05	3·80
170°	17	12	50	600	3062	5·12	12	50	600	999	1·65	3·39

\* Az iv nagyon nyugtalan.

III. Összehasonlításul mérések a rendes ívlámpákkal. A szenek nyugalomban, a hajlásszögük és a vertikálissal képezett szög változó.

Hajlásszög	A + szén hajlása a vertikális-hoz	Amp.	Volt.	Watt.	Zöld C. P.	C. P. per Watt.	Amp.	Volt.	Watt.	Vörös C. P.	C. P. per Watt.	Fehér C. P. per Watt.
180°	0°	12	50·4	605	1222	2·05	12	50·4	605	464	0·77	1·41
180°	15°	12	50	600	2251	3·76	12	50·1	601	843	1·45	2·6
180°	30°	12	50	600	2981	4·97	12	49·9	599	1162	1·94	3·45
180°	35°	12	49·8	597	2741	4·6	12	50	600	1164	1·94	3·27
175°	20°	12	50	600	1687	2·82	12	50	600	753	1·26	2·04
170°	0°	12	49·3	592	3082	5·22	12	49·8	598	1380	2·31	3·76
170°	10°	12	50	600	3244	5·42	12	51	612	1376	2·26	3·84
160°	10°	12	49·4	593	2408	4·07	12	49·4	593	994	1·67	2·87

A következő táblázat méréseinél a szenek egy egyenesben voltak elhelyezve, de a két szén hajlása a vertikális-hoz változó volt.

Hajlásszög	Amp.	Volt.	Watt.	Zöld C. P.	Vörös C. P.	Fehér C. P.	Fehér C. P. per Watt.
45°	12·8	51·7	661	1892	765	1328	2·01
50°	10·4	56	583	1907	741	1324	2·27
60°	12·2	48	586	2078	798	1438	2·46
62·5°	12	53·5	643	2207	783	1495	2·33
65°	12·3	49·6	600	1890	849	1369	2·14

Az e táblázatokban foglalt adatokból kitűnik, hogy a legnagyobb megvilágítást a nyugalomban levő szenekkel érjük el, ha azok 110—120°-nyi szöggel hajlanak egymáshoz. A pozitív szén forgatása csökkenti a horizontális irányban a megvilágítást, de a szén egyenletesen ég, úgy hogy a maximum a vízszintesben marad. A fix szenekkel a fény csak mintegy 15 perczig volt jó, azontúl a maximum iránya mindinkább lehajlott. A forgó pozitív szénnel



azonban még mindig jobb eredményt értünk el, mint a most használatban levő projectió lámpával.

Miután a forgatás által elértük a positiv szén egyenletes égését, arra kellett törekednünk, hogy közelebb jussunk a fix szénekkel elért értékhez forgó positiv szénnel is.

A forgatás folytani csökkenése a fényességnek onnan eredhet, hogy ha a forgás gyors, úgy az ivbe egészen hideg szénfelület jutva, azt nagyon lehűti. Azért törekedtünk annyira csökkenteni a forgási sebességet, hogy a mellett még a szén egyenletes elége is megmaradjon. Miután 15 perczig ég a nyugalomban levő szén, a nélkül, hogy a maximum iránya megváltoznék, egy fordulat idejét harmincz perczre tettük, ez által biztosítva van a szén egyenletes égése s egyuttal meg van akadályozva az iv erős lehülése. Ilyen berendezéssel nyertük a következő eredményeket:

IV. *A positiv szén tengelye körül egyszer megfordul 30 percz alatt. A két szén hajlásszöge változó.*

Hajlás- szög	Az észle- letek száma	Amp.	Volt.	Watt.	Zöld C. P.	Vörös C. P.	Fehér C. P.	Fehér C. P. per Watt.
90°	20	11·2	50·2	563·4	3429·5	1346	2387·4	4·25
100°	10	11·6	51·2	595	3938	1759	2848·5	4·78
110°	25	11·2	51·2	573·8	3571	1487·4	2529·2	4·42
120°	16	11·5	52·3	599	3616	1321	2468·5	4·19

Ilyen méréseknél az iv igen szép, állandó volt s mint látható, a kisebb sebesség növelte a fényességét.

Miután a fix szénknél a maximum irányának lehajlása a tendenzia, megpróbáltuk, hogy a positiv szénnek a vízszinteshez való hajlítása ilyen kis sebesség mellett van-e befolyással a vízszintes irányban való fényességre? A következő táblázat méréseinél a positiv szén megint 30 percz alatt fordult meg, a két szén hajlásszöge 100° (az előbbi maximális helyzet), a positiv szén hajlása a vízszinteshez változó.

A pozitív szén lehajlása	Az észleletek száma	Amp.	Volt.	Watt.	Zöld C. P.	Vörös C. P.	Fehér C. P.	Fehér C. P. per Watt.
0°	10	11·6	51·2	595	3938	1759	2848·5	4·78
5°	21	11·8	50·1	592·6	4353	1637	2995	5·05
*10°	16	11·2	50	560	3576	1723	2649·5	4·73
*15°	8	11·5	52	597	2698	1669	2183·5	3·66

V. Ha most már az összes kísérletek adatait áttekintjük, a különböző sorozatok *legjobb* eredményeiből a következő táblázatot állíthatjuk össze, a mely a legkönnyebb tájékozást nyújtja. A kísérleteknél használt pozitív bélszenek 18 mm, a negatív tömörszenek 11 mm átmérőjűek voltak, hajlott szenek esetében a negatív csúcsa körülbelül 2 mm-rel volt a pozitív alsó széle fölött.

A szén hajlásszöge	A pos. szén hajlása a vízszinteshez	Egy fordulat ideje	Watt.	Fehér C. P.	C. P. per Watt.	Megjegyzés
100°	0°	(nyugalom) ∞	601·2	3115·5	5·17	A fényesség gyorsan csökken, a mint a szén ferdén ég.
100°	0°	1 1/4 perc	606	2547·5	4·21	
100°	0°	30 „	595	2848·5	4·78	Az iv nyugodt, a szén egyenletesen égnek el.
100°	5°	30 „	592·6	2995	5·05	
180°	60°	∞	599·5	2071·5	3·45	Közönséges vetítő lámpa.

Mindez adatok a horizontális irányra vonatkoznak.

E táblázat világosan mutatja a kísérletek eredményeit, hogy

a) a pozitív szén forgatása csökkenti a fényességet és pedig annál inkább, minél nagyobb a forgási sebesség (úgy, hogy igen gyors forgás mellett az ív nem jő létre);

b) a forgó szén elégeése egyenletesen történik, úgy hogy a kráter a szén közepén szimmetrikusan keletkezik;

\* Az iv nyugtalan.



c) az a legkisebb forgási sebesség, mely mellett a használt szenek esetében az elégés még egyenletes, óránként 2 fordulathoz felel meg. Ekkor a fényesség csökkenése a forgás következtében mintegy 10% ;

d) a forgó szenű lámpa effektusa még mindig nagyobb (4,78 és 3,45) mint a rendesen használt projektoroké. Ezekből következik, hogy a nyugalomban levő szén esetében talált effektust egyesítve a szenek egyenletes elégésével, más módon kell elérni, mint a forgatással. Ez valószínűleg lehetséges, ha a szeneket külön e célra præparáljuk ; az ilyen mérésekhez szükséges eszközök hiányában azonban ennek az igazolását későbbre halasztom.

*Klupathy Jenő.*

## VILLAMOS HULLÁMHOSSZÚSÁG ÉS TÖRÉSI MUTATÓ.

A mint ismeretes, HERTZ a villamosság történetében új korszakot jelentő felfedezéseivel kimutatta az ő előtte csak hypothetikus villamos hullámmozgás valóságát. Sikerült neki a villamos hullámok létezését nem csak kimutatni, hanem ezeket a hullámokat hatásaikban is megfigyelhetőkké tenni. És ma már a villamos hullámok törése, reflexiója, sarkítása a fénytűnemények eddigelé ismert, megfelelő törvényeire van visszavezetve.

Az az út, melyet valamely villamos hullám egy rezgési idő alatt megtesz, a villamos hullámmozgás. Ha aztán valamely villamos hullám egy testből, pld. a levegőből egy más testbe, pld. valamely folyadékba átmegy, hullámmozgása megváltozik s a hullámmozgások viszonya, mint a fénytűnemények, itt is törési mutatónak, villamos törési mutatónak nevezetik.

Egy pár folyadékra magam is megmértem a villamos hullámmozgásút s meghatároztam a törési mutatót. Mert, tudomásom szerint, hazánkban e fajta meghatározás publikálva nem volt és mert a leírandó módszerrel a benzolnak és az alkoholnak törési mutatója még nem volt meghatározva, időszerűnek tartanám megfigyeléseim közlését.

A villamos törési mutató értéke egy másik, igen fontos mennyiséggel is összefüggésben van: az u. n. dielektrikus állandóval. Tudjuk u. i., hogy MAXWELL megállapította elméletileg a szóban lévő két mennyiség következő relációját  $k=n^2$ , ha  $k$  a dielektrikus állandót és  $n$  a törési mutatót jelenti s ismeretes előttünk az a hosszas munka és fáradozás is, mely az utóbb lefolyt 15 év alatt ennek a theoretikus relációnak beigazolására törekedett. Hosszú idő lefolyása alatt ez a fáradozás sikertelen maradt. BOLTZMANN



volt az első, kinek először sikerült kimutatni e relatió igazát, de neki is csak a testeknek egy fajára: a permanens gázakra. Mivel azonban ezeknek a testeknek száma kicsiny s magok teljesen isolatorok és kicsiny a szinszóró képességük is, a BOLTZMANN-féle eredmények után is kétséges maradt, hogy a fenti relatió minden testet egyaránt megillető értelemben elfogadható-e?

Ugy látom, hogy a dielektrikus állandó meghatározása s így ennek a relatiónak beigazolása történetében épen a HERTZ-féle kísérletek publikálása által elválasztott két időszakot lehet megkülönböztetni: az azelőtti és az azutáni. Az előbbi bizonyos ingadozás és bizonytalanság jellemzi, úgy ezeknek az állandóknak meghatározási módjában, mint értékében, míg az utóbbi alatt határozottabb, a relatiónak megfelelőbb értékek kerülnek elé. Hogy többet ne említsek SCHILLER 1874-ben, COHN és ARONS 1886-ban arra az eredményre jutnak, hogy a dielektrikus állandók értéke még attól az időtől is függ, mely alatt az elektromos erők hatnak és pedig akképen, hogy azzal nőnek, de már LECHER 1891-ben azt találja, hogy HERTZ-féle igen kis idejű rezgéseket használva, ezek a konstansok az említett idő kisebbedésével épen nőnek. Az általános bizonytalanság jellemzésére még csak azt hozom fel, hogy HEERWAGEN ezelőtt csak öt évvel is a víz dielektrikus állandóját végtelennek találta.

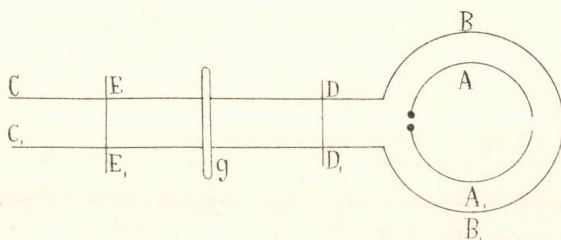
HERTZ kísérleti eredményei után ezeknek az állandóknak meghatározása általában háromféle módszerrel történt: kapacitások mérésével (LECHER, THOMPSON, BLANDLOT); sebesség-, illetőleg útmeghatározással (ARONS és RUBENS) és annak az eltérésnek mérésével, melyet a villamos sugarak valamely testből alakított prismától szenvednek (ELLINGER). Kétségtelen azonban, hogy úgy a kísérleteknél fellépő akadályok elhárításában, mint a kísérletekhez szükséges berendezés egyszerűségében az a legegyszerűbb és a legkényelmesebb módszer, mely sebesség-, illetőleg útmérésen alapszik. Mert ha a villamos hullámoknak bizonyos útirányt adunk, pld. két párhuzamos drót hosszában, melyeket a villamos törési mutatóra meghatározandó testen vezetünk át, intensiv elektromos hullámokat kaphatunk, melyeknek hullámhosszúságát a DRUDE-féle



módszerrel annyira megrövidíthetjük, hogy azok mérése kisebb tömegű testekben is kényelmesen keresztülvihető.

A DRUDE-féle módszerrel való meghatározáshoz szükséges készülék két köralakulag meggörbített  $AA_1$  drótból áll, melyek egymás felé fordított egyik pár végeiben sárgarézből készült, csiszolt golyócskákkal vannak ellátva, a melyek egy szikra-induktor sarkai-  
val állanak összeköttetésben. Ez képezi a BLANDLOT-féle inditót s a golyócskák között képződik a primár szikraút. A sekundár vezető  $BB_1$  körülfogja az indító vezetőjét s két párhuzamos  $CC_1$  drótbba folytatódik, melyek  $DD_1$ -nél fémileg vannak áthidalva.

A mint az induktor működésbe hozatik, villamos hullámzás indul meg a levegőben minden irányban s a sekundár vezetőn is;



még pedig ebben akképen, hogy az inditónak és a sekundár vezetőnek  $DD_1$ -ig bizonyos rezgési tartama lesz. Az itt keletkező rezgéseket DRUDE főrezgéseknek nevezte el.\* Ha a sekundár vezetőre  $DD_1$  hid után egy  $G$  GEISSLER-csőt helyezünk el s egy második,  $EE_1$  hidat a sekundár vezető hosszában eltolunk, a hidnak több oly helyzetét állapíthatjuk meg, a hol a GEISSLER-cső világítani kezd. Ezek a helyek nyilván  $DD_1$  hidtól, illetőleg egymástól azoknak a villamos hullámoknak egy-egy félhullám-hosszúságnyi távolságában fekszenek, a melyek a sekundár vezető irányában terjednek és a melyek a főrezgéssel egyértelműben, vagy a mint DRUDE mondja,

\* Eine bequeme Methode zur Demonstration der electrischen Brechungs-exponenten. Abdruck aus den Berichten der math. phys. Classe der K. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mai 6. 1895. Megjelent a Wied. Ann. ugyanazon évfolyamában is.



unisono rezonálnak. És ha  $EE_1$  hid emez, egymásra következő helyzeteit lemérjük, azokat a távolságokat kapjuk meg, a melyekben a villamos hullámok elongatiója a legnagyobb és ezek a helyek, a mint tudjuk, egymástól félhullám-hosszúságnyra fekszenek.

Ha most a sekundár vezetőt valamely folyadékban átvezetjük, a mely egy kis, hosszúkás üvegedényben van elhelyezve, a sekundár vezető irányában a levegőben terjedő villamos hullámok megváltoztatják hosszúságukat ebben a folyadékban. A megváltozott félhullám-hosszúságot akképen határozzuk meg, hogy most  $EE_1$ -nek a folyadékban ama helyzeteit mérjük le a belépési helytől számítva, a hol a GEISSLER-cső felvilágít.

Kísérleteimet, a melyeknek eredményeit az alábbiakban közlöm, az így ismertetett eszközzel és módszerrel hajtottam végre. Az indító egy közép nagyságú szikra induktorral volt összekötve, melyet három akkumulátor táplált és a leolvasások egy a sekundár vezető alján elhelyezett skálán történtek. A GEISSLER-cső helyett azonban egy ZEHNDER-féle használtatott, melynek világító terében egy ZAMBONI-féle oszloppal egybekötött elektroszkop töltése süttetett ki. Ez a berendezés annyiban előnyösebb, mert így csak az elektroszkop lemezeit kell megfigyelnünk, míg a GEISSLER-csővel való kísérletnek sötétben kell végbe mennie, mikor is a skáláról való leolvasás sok alkalmatlansággal jár.

1. A levegőben  $EE_1$  első helyzete, a hol  $G$  világít  $DD_1$ -től 10·3 cm volt, a második 46·4 cm és a harmadik 82·7, minden adat 10 mérés középértékéből véve. E szerint egy félhullám hosszúsága a levegőben 36·1 cm a két első mérés alapján és a két utolsó alapján 36·3 cm s így e kettő középérték szerint 36·2.

2. A vízben egy félhullám hosszúsága 8 mérés középértéke szerint 4·06 cm s így a vízre

$$n = \frac{36.2}{4.06} = 8.9$$

és

$$k = n^2 = 79.21$$

3. A benzolban ugyancsak 8 mérés alapján a félhullám hosszúsága 23·4 cm volt és így

$$n = \frac{36.2}{23.4} = 1.54$$

és

$$k = 2.37$$

4. Az alkoholban szintén 8 mérés eredménye szerint a félhullám hosszúsága 7.01 cm volt s így

$$n = \frac{36.2}{7.01} = 5.16$$

és

$$k = 26.6$$

*Ellend József.*



## AZ ÉRINTKEZÉSI ELEKTROMOSSÁG EREDETÉRŐL.

(C. CHRISTIANSEN: Experimentaluntersuchungen über den Ursprung der Berührungselektricität. WIEDEMANN's Annalen. Neue Folge. 1895. Bd. 56., 1896. Bd. 57., 1897. Bd. 62.)

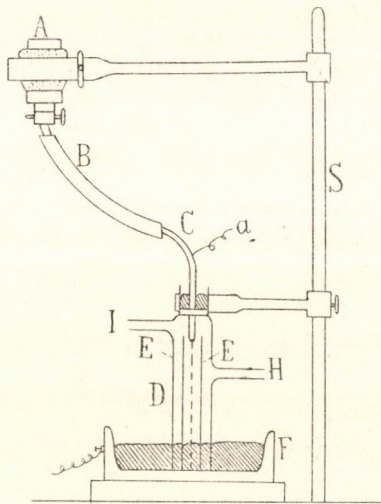
A dörzsölési elektromosság eredetére vonatkozó kísérleteiből CHRISTIANSEN azt a következtetést vonta le, hogy ezen elektromosság keletkezéséhez az oxigénnek nagy köze van. Újabb kísérletei alkalmával a VOLTA-féle érintkezési elektromosság eredetét kutatta. E kísérletek mindjobban megerősítették abban a hitében, hogy az érintkezési elektromosság keletkezése is az oxigén jelenlététől függ. Lehet ugyan, hogy más gázoknak is van olyan hatásuk, mint az oxigénnek, de a levegő alkatrészei közül csak az oxigén bizonyult hatásosnak.

CHRISTIANSEN eddig három közleményben ismertette kísérleteit és azok eredményeit. Terjedelmes czikkeiben sok táblázatot közöl, a melyek a megfigyelések eredményeit tüntetik fel. Itt csak eljárásának lényegét és a kísérleteiből vont következtetéseket akarjuk röviden tárgyalni.

★

A kísérleti elrendezés a következő: Az *A*-val jelölt vastartó kb. 1 kg. higanyt tartalmazhat. Az *S* állványtól pecsétviasz-burkolat szigeteli el. A tartót vastag kaucsukcső (*B*) köti össze a *C* üvegcsővel, a mely alul hegyesre van kihúzva és kb. 0,15—0,3 mm. átmérőjű nyílással bír. A *C* csövet pecsétviasz szigeteli attól a dugasztól, a melyen keresztül megy és a mely a *D* üvegcsövet fölül zárja. Ezen csőben két vezető lemez van (*E*), a «lemezelektrodok», a kifolyási nyílás mindkét oldalán, egymástól 2—4 mm.-nyire. A lemez szélessége 2—3 cm., hossza kb. 10 cm. Az *F* vastartó,

melyet az alzattól sellaklemez szigetel. *F* tartó higanyt tartalmaz, a melybe a lemezek közvetlenül belemerülnek, vagy a melylyel platinadrót köti őket össze. *I* és *H* két, a szélesebb *D* csőre ráforrasztott üvegcsővecske, a melyeken át *D* tetszőleges gázzal tölthető meg. A potenciálkülönbségek mérésére quadráns-elektrométer szolgált, a melynek kiütése *Volton*kint kb. 10 mm.-nyi; a mérések pontossága tehát kb. 0,01 Volt. A *C* csőbe az *a* platinadrót forrasztatott, a mely az elektrométer egyik sarkához vezetett, míg a



1. ábra.

másik sark az *F* tartóval és a földdel volt vezetőleg összekapcsolva. Az egész készülék faszekrényben állott, melynek sárgaréz bélése a földdel volt összekapcsolva. A vékony hegyű *C* csőből higany (vagy más esetekben amalgam) folyik ki cseppekben s ezek esésekor az elektrométer kiütést mutat, mely a higany és lemez-elektrodok közötti potenciál-különbség mértékeül szolgál. A kiütések értékét Voltokban két hitelesített LATIMER CLARK-féle elemmel való összehasonlítás révén határozták meg.

Mint látható, a kísérletekhez csepp elektrodok használtattak.

1. CHRISTIANSEN először is arról akart meggyőződni, hogy a



cseppelektrodok alkalmasak-e a potenciál-különbségek mérésére. E végből lemez-elektrodok gyanánt egymásután különböző fémeket használt légköri levegőben. Ez esetben a *D* üvegcső fölőslages. A fémlemezeket nagyobbára csak mechanikai úton, smirgellel való dörzsölés vagy késsel való vakarás útján tisztította. A megvizsgált fémek voltak: magnesium, kadmium, aluminium, horgany, ólom, réz, vas, ón, nikkel, ezüst, platina, szén. Ezen fémek és a higany potenciálkülönbségeinek közelítő értékei gyanánt a következő számok tekinthetők (Volt-okban):

<i>Mg</i>	<i>Al</i>	<i>Cd</i>	<i>Zn</i>	<i>Sn</i>	<i>Pb</i>	<i>Fe</i>	<i>Ni</i>	<i>Cu</i>	<i>Hg</i>	<i>C</i>
1,10	0,86	0,78	0,74	0,56	0,48	0,20	0,17	0,0	0,0	—0,3.

E számok csak azt mutatják, hogy potenciálkülönbségek csak-ugyan mérhetők a cseppelektrodok segélyével. Megjegyzendő, hogy ha folyadéksugár cseppekre oszlik, a kisebb cseppek minden oldal felé mennek. A lemezelektrodokon tehát apró higanycseppecskék találhatók, melyek bizonyára nincsenek befolyás nélkül a potenciálkülönbségekre. Csak akkor zavarnak kevésbé, ha a fém könnyen amalgamálódik. Szénből való lemezelektrodok esetében a cseppecskék legkevésbé zavarók, azért CHRISTIANSEN sokszor használt ilyeneket.

A levegőben mutatkozó potenciálkülönbségek megállapítása után egyéb gázok hatását kellett megállapítani.

Az eredmények nagyon ingadozók voltak, de úgy látszott, hogy a potenciálkülönbség részben a körülvevő gázatmoszférától függ. A platina viselkedése olyan volt, mint rendesen, t. i. hidrogénben pozitívabb lett, oxigénben negatívabb. A többi fémek ellenkezőleg a hidrogénben mutatkoztak negatívabbnak, mint a levegőben.

2. A tiszta higanyból való csepp-elektrodokon kívül amalgam-elektrodok is szerepeltek a kísérletekben, Mivel gyenge amalgamok is úgy hatnak a galván-kombinációkban, mint a megfelelő fémek, várható volt, hogy sugár-elektrodok segélyével meg lehet állapítani az illető fémek helyét a feszültségi sorozatban. Itt azonban váratlan nehézségek merültek fel. Kitűnt, hogy mind az amalgam erőssége, mind a sugár hossza és átmérője befolyásolja az eredményt.



Tiszta higany esetében a potenciálkülönbségek ugyan változtak a sugár hosszával és átmérőjével, de ezen változások közt és a sugár dimenziói közt megállapítható összefüggés nem mutatkozott. Szabad tehát feltételezni, hogy a tiszta higanyból való sugárelektrodok helyesen mérik a potenciálkülönbségeket.

Horganyamalgammal végzett kísérletek egészen más eredményekre vezettek. A legerősebb amalgamok esetében a sugár — főleg a legtágasabb csőben — egészen megváltoztatta külsejét; igen hosszúra nyúlt, mintegy kihegyeződött s úgy látszott, hogy nem bírt cseppekre oszolni. Az eredmények ekkor bizonytalanok voltak. A kísérlet elején a feszültségi különbség növekedett, de a kiütés aztán hirtelen zérusra csökkent, mert az összefüggővé vált sugár vezetőként szerepelt a felső és alsó higanytartó között. A potenciálkülönbség a higanytartalommal és a cső átmérőjével együtt növekedett, szintűgy a sugár tartamával.

A potenciálkülönbség horgany-amalgam és higany között az oxigén jelenlététől függ.

A kísérletekből t. i. az látszott, hogy a horganyamalgam-sugár felületén kémiai változás áll be; mennél hosszabb tartamú a sugár, annál tovább halad ez a változás s ez valószínűleg az oxidáció egy nemében áll. E szerint oxigénmentes légkörben nem kellene potenciálkülönbségnek mutatkoznia. Ennek kimutatása végett a kísérletek fölváltva oxigénmentes hidrogénben és levegőben végeztek.

Lemez-elektrodok gyanánt vaslemezek szerepeltek, melyek hosszabb használat következtében oxidáltak voltak. A nyomásmagasság és a kifolyási sebesség állandónak tartatott meg, de a sugár hossza változó volt (10—20 mm között). A horganyamalgam és tiszta higany hidrogén- és nitrogénatmoszférában egyformán viselkedett. Tiszta oxigén erősebben hatott, mint a levegő, tehát az oxigén a ható elem. Ennek hatása a cadmium-, ólom- és ón-amalgam-esetében is világos volt.

Úgy látszik tehát, hogy az amalgamok és tiszta higany közötti potenciálkülönbségeket az oxigén hozza vagy hozhatja létre. CHRISTIANSEN valószínűnek tartja, hogy a többi fém is úgy visel-

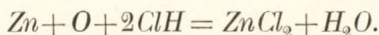


kedik, mint a megvizsgált négy, habár vassal és a vele rokon fémekkel nem lehetett az oxigén hatását kimutatni.

A végbemenő folyamatot CHRISTIANSEN a platinának az oxigénben vagy hidrogénben való polárizációjához hasonlítja, és ezért oxigénben vagy levegőben kiáramló amalgamsugarat polarizálnak nevez. A horganyamalgam pozitíve polarizálódik, tehát a potenciál a sugár belsejében negatív, a környező levegőben pozitív. Ezen polarizáláshoz észrevehető idő kell.

3. A polarizálás tanulmányozása végett CHRISTIANSEN különböző gázakat használt fel.

A horganyamalgamot higanyon kívül szénnel is kombinálta és azt tapasztalta, hogy a potenciálkülönbség a horgany-amalgam és szén között  $ClH$  atmoszférában is kb. ugyanakkora, mint levegőben. Sajátságos, hogy míg  $O$  és  $ClH$  egyenként igen erőiesen hatnak, keverékük semmi hatást sem gyakorol. Magyarázata ennek az lehet, hogy a behatás ezen képlet szerint történik:



A kölcsönhatás még következőleg is mutatkozott. Horgany-amalgam ( $^{2/1000}$ ) finom sugárban ömlött ki levegőben. A sugár 5—10 cm hosszú volt; a kifolyási cső átmérője 0,3 mm. Midőn a sugárhoz — egészen közel — sósavval megnedvesített üvegsövet tartottak, a sugár azonnal megrövidült, mintegy 1 cm-re; egyuttal az előbbtől egészen különböző hang hallatszott, midőn a cseppek a higanyba estek. Salétromsav és ecetsav úgy hatottak, mint a sósav. Ammoniakkal és kénsavval nem volt hatás kimutatható.

Előbbi kísérletek szerint az oxigén a rézamalgamot vagy éppen nem, vagy csak gyengén polarizálja;  $ClH$  ellenben határozottan polarizálólag hat. A  $ClH$ -atmoszférában a fémek és tiszta higany között vannak potenciálkülönbségek, de a fémek, a réz kivételével, alantabb állnak a feszültségi sorban, ha  $ClH$  veszi őket körül, mint ha levegőben vannak.

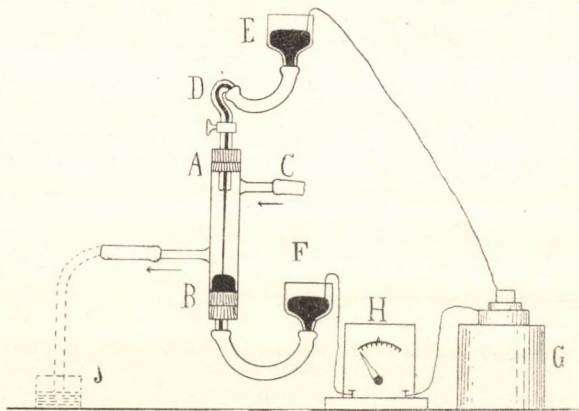
A *kénhidrogén* nem polarizálja sem a horganyamalgamot, sem a rézamalgamot. Lehet, hogy a polarizálás hosszabb időt vesz

igénybe. A legtöbb fém a  $H_2S$ -atmoszférában lejjebb kerül a feszültségi sorban, mint a levegőben.

A *kénssav* polarizálólólag hat a *Zn*-amalgamra. *Cd*-amalgamra a hatás gyengébb; *Cu*-amalgamra, úgy látszik, nincs hatása.

A *nitrogénoxidul* csak gyengén hat a *Zn*-amalgamra polarizálólólag.

A kísérletek eredményeit összefoglalva, az látszik, hogy *O* és *ClH* polarizálólólag hatnak a *Ka*, *Na*, *Zn*, *Cd*, *Pb*, *Sn*, *Cu* fémek amalgamaira; az  $SO_2$  a *Zn* és *Cd*-éra. Lehet, hogy a midőn polarizáló hatás nem mutatkozott, a gáz- és amalgamsugár érintkezése



2. ábra.

sének ideje: 0,01—0,02 mp. csekély volt és hogy hosszabb behatás előidézhetheti a polarizálást.

A kísérletekből az látszik, hogy a potenciálkülönbség amalgamok és higany között eltűnik, ha ezek közömbös gázokban vannak, mint *H*-ban vagy *N*-ben; föllép azonban az *O*-ban és *ClH*-ben, ha ezen gázok az amalgamokra vegyileg hathatnak. Milyennek kell lennie ezen vegyi behatásnak, hogy potenciálkülönbség keletkezzék, az még nincs kimutatva.

4. Az a körülmény, hogy a *Zn*, *Cd*, *Pb* és *Sn* amalgamjainak sugarai a levegőben, oxigénben és kénssavban meggyúlnak, a viszonyok további vizsgálatát tette szükségessé.



A 2. ábra föltünteti azt a készüléket, a melylyel CHRISTIANSEN az amalgam-sugarak hosszát, illetve a hosszúság változásait megfigyelte. Az *A* üvegcső 1·5 cm átmérőjű, 5 cm hosszú; két oldalt a *B* és *C* keskenyebb üvegcsövek vannak hozzáferrasztva. Az *A* csövet fönt és lent kaucsukdugó zárja. Az *E* üvegtartóból a *D* keskeny csövön át amalgam ömlik az *A* csőbe s innen az *E*-hez hasonló *F* tartóba kerül. *G* galvánelem, *H* milliampèreméter. A *G* és *H* vezetőleg vannak *E*- és *F*-fel összekötve. A *G*-t *H*-val szintén drót köti össze. Ha az *A* csőben hosszú sugár képződik, az ampèreméter az áramkör zárása következtében kiütést mutat. Az áram rendesen állandó, de megtörténik, hogy a mutató nagyon nyugtalan. Ilyenkor a különben egészen simának látszó sugáron a sötétben helyenként kis szikrák látszanak, a mi annak jele, hogy itt a sugár meg van szakítva. Az elektromos áramra tehát szükség van, hogy a sugár mint összefüggő ismertessék fel.

A vízgőz behatásának megvizsgálása végett CHRISTIANSEN három kapilláris csövet használt, melyek 0,22, illetve 0,18 és 0,14 mm-nyi átmérőjűek voltak. Ezeken át olyan *Zn*-amalgam ömlött keresztül, a mely kg.-ként 4 gramm horganyt tartalmazott. A kísérletek alkalmával légköri levegő áramlott *C*-n keresztül *A*-ba s innen *B*-be. A levegő eleinte  $P_2O_5$ -el száríttatott, később pedig kénsav és víz keverékein keresztül bocsátatott. A kísérletekből az tűnt ki, hogy a vízgőz a sugarat megrövidíti.

A sósavgáz behatását úgy lehetett megvizsgálni, hogy az *A* csövön először száraz levegő áramát bocsátották keresztül, azután pedig megszakították ezen áramot és az *I* csészében levő sósav gőzét engedték átdiffundálni az *A* csőbe. A száraz levegő behatása alatt a sugár megnyúlik és az ampèreméter kiütést mutat. Mihelyt sósavgáz diffundál *A*-ba, a sugár néhány percz alatt cseppekre bomlik (alsó részében) és az észlelt kiütés megszűnik. Mivel a cseppekre való bomlás pillanatát jól lehet megállapítani, CHRISTIANSEN azt hiszi, hogy ezen eljárással a diffusio sebességét is meg lehet határozni.

Száraz kénessav megrövidíti a sugarat s ebből arra lehet következtetni, hogy az illékony savak hatása nem függ vízgőztartalmuk-

tól. Ezt az a körülmény is bizonyítja, hogy a hosszú sugárra való behatásuk sokkal erélyesebb, mint a vizgőzé.

Száraz oxigénben a következő fémek amalgamsugarai nyúlnak meg:

*K, Na, Mg, Al, Zn, Cd, Pb, Sn, Tl.*

5. Az *oximéter*. Az előbbiek szerint az amalgam és higany közötti potenciálkülönbség keletkezéséhez oxigén jelenléte szükséges. Az a kérdés merül fel, milyen az oxigén hatása az amalgamra? Az előbbi vizsgálatok erre nézve nem nyújtanak felvilágosítást és ezt chemiai elemzés révén sem lehet elvárni a hatás csekély volta miatt. Valószínűnek tűnt azonban fel, hogy az amalgamtól elnyelt oxigén térfogatának meghatározása célhoz fog vezetni.

Az elnyelés meghatározására CHRISTIANSEN külön készüléket állított össze, a melyet oximéternek nevezett el. Ebben üvegedényből kapilláris csövön át tiszta higany vagy amalgam csepegett egy alsó edénybe. A két edény levegőjét külön kapilláris cső köti össze mely azonkívül még egy higany- és egy toluol-manométerrel közlekedik. A két üvegedény felső részét egy-egy kaucsukdugó zárja el, a melyen át a kapilláris csövek hatolnak be és a mely fölött kevés higany biztosítja a légmentes zárást. Az üvegedényekbe kis fémkosárcák illeszthetők  $P_2O_5$  felvételére, a levegő szárítása céljából.

CHRISTIANSEN 12 táblázat kapcsán ismerteti kísérleteinek eredményeit. Mivel ezek részben nagyon ingadozók, elég lesz itt a főbb eredményekre szorítkozni. Ezek a következők:

1. Száraz levegőben vagy száraz hidrogénben kiömlő tiszta higany esetében a manométer nem mutat elnyelést; nedves levegőben némi elnyelés észlelhető, a mely a nedvességtartalommal növekedik. Az okozati összefüggést még nem lehetett megállapítani.

2. Horganyamalgammal végzett kísérletek alkalmával kitűnt, hogy az elnyelés nagy mértékben függ a sugarat környező atmoszféra nedvességtartalmától. Mivel a nedvességet teljesen nem lehet eltávolítani, ez a körülmény állandóan nehézségeket okozott az észlelés biztosságára nézve, mert már igen csekély nedvességtartalom is



befolyásolja az eredményt. Ha a levegő száraz, az elnyelés állandóbb, ha gyönges amalgam ömlik ki a kapilláris csővön, de változó, ha az amalgam erős. Ez valószínűleg onnan van, hogy a gyenge amalgam sugarai gyorsan oszlanak szét cseppekre, a melyek felülete aztán nem szenved változást. CHRISTIANSEN a dolgot úgy magyarázza, hogy a horganyamalgam lassanként vékony oxidréteggel vonódik be, ha hosszú sugárban ömlik oxigéntartalmú atmoszférába. Rövid idő alatt annyi oxid képződik, hogy további oxidálás nem történik s akkor az elnyelés független a sugár hosszától. Ez tehát ugyanaz, a mit a légköri levegőnek kitett horgany oxidációjáról tudunk: vékony oxidréteg megvédi a fémeket az oxigén további behatása ellen.

Hidrogén és nitrogén közömbösnek bizonyult.

3. Ha az amalgamsugár tiszta oxigénben ömlik ki, az elnyelés kissé nagyobb mérvű, mint a levegőben. A különbség azonban csekély az oxigén részleges nyomásainak különbségéhez képest. Hosszú sugarak esetében az elnyelés nem függ az oxigén nyomásától.

4. Natriumamalgam esetében az elnyelés folyamata lényegileg ugyanaz, mint a horganyamalgam esetében. Ha a sugár 2 cm-nél hosszabb, az elnyelés állandóvá lesz. Oxigénben az elnyelés kissé nagyobb, mint levegőben. Csekély mennyiségű nedvesség már csökkenti az elnyelés nagyságát. A hidrogént a natriumamalgam — úgy látszik — nem nyeli el; ha a sugár nitrogén-atmoszférában ömlött ki, eleinte elnyelés mutatkozott, de az gyorsan csökkent. Lehet, hogy itt is kevés oxigén volt a nitrogén kíséretében és hogy az amalgam magát a nitrogént nem nyeli el.

5. Magnesium-amalgam száraz levegőben majdnem olyan elnyelést tanúsít, mint a *Zn*-amalgam. — Cadmium-amalgam az oxigént csekélyebb mértékben nyeli el, mint a *Zn*-amalgam. — Ólom-amalgam levegőben és oxigénben egyforma elnyelést tanúsított. — Ónamalgam az oxigént kb. olyan mértékben nyeli el, mint a *Pb*-amalgam.

*Csemez József.*

## VAN DER WAALS MEGFELELKEZŐ ÁLLAPOTOKRA VONATKOZÓ TÖRVÉNYÉNEK IGAZOLÁSA.

### KRITIKUS ÁLLANDÓK MEGHATÁROZÁSA.

AMAGAT E. H.-tól.\*

Mielőtt AMAGAT e cikkének ismertetéséhez fognék, mely cikk AMAGAT-nak a megfelelkező állapotokra vonatkozó eredeti és valóban szellemes vizsgálódásait tartalmazza, azt hiszem, nem lesz felesleges, ha egyet s mást felemlitek az idevágó dolgok közül.

Mivel az ismeretes jelölésekkel írt MARIOTTE-GAY-LUSSAC-féle :

$$\frac{pv}{T} = \frac{p'v'}{T'}$$

törvény aránylag csak szűk határok között felel meg a valóságnak, sokan foglalkoztak a nyomás, térfogat és hőmérséklet között fennálló összefüggésnek, a  $f(p, v, t)=0$  egyenletnek pontos megállapításával. Így VAN DER WAALS \*\* elméleti úton, arra az eredményre jutott, hogy a nyomás, térfogat és a hőmérséklet között lévő összefüggést a

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT$$

egyenlet fejezi ki, melyben  $a$ ,  $b$  és  $R$ , az anyag minőségétől függő, kísérleti úton meghatározható állandók. Valamely anyag isothermáinak előállítására csak azokat a görbe vonalakat kell megszer-

---

\* Journal de Physique 3e série, t. VI., p. 5. 1897.

\*\* Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. Von Prof. Dr. I. D. VAN DER WAALS. Übersetzt von Dr. F. ROTH.



keszteni, melyeket a fentebbi egyenlet képvisel a hőmérséklet ( $T$ ) különböző értékei mellett, midőn a nyomás ( $p$ ) és a térfogat ( $v$ ) az egyenletnek változói. Természetes, hogy a különböző anyagok isothermái más és más képet fognak nyújtani, a mint az anyag természetete szerint más és más értékkel bírnak az egyenletben előforduló állandók.

VAN DER WAALS az isothermák tulajdonságainak tanulmányozása után, figyelembe véve a testek kritikus pontjának az értelmezését, arra az eredményre jutott, hogy az összes anyagokra nézve az anyagot jellemző kritikus állandók, ú. m.: a kritikus-nyomás ( $p_1$ ), -térfogat ( $v_1$ ), -hőmérséklet ( $T_1$ ) és az illető anyagnak megfelelő  $a$ ,  $b$  és  $R$  állandók között a következő összefüggések állanak fent:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{a}{27 b^2} \\ v_1 &= 3b \\ T_1 &= \frac{8}{27} \cdot \frac{a}{bR}. \end{aligned}$$

Ha VAN DER WAALS szerint a nyomás ( $p$ ), a térfogat ( $v$ ) és a hőmérséklet ( $T$ ) mérésére, a kritikus-nyomást ( $p_1$ ), -térfogatot ( $v_1$ ) és -hőmérsékletet ( $T_1$ ) fogadjuk el mértékegységül, azaz ha felteszszük, hogy:

$$p = \varepsilon p_1, \quad v = n v_1 \quad \text{és} \quad T = m T_1,$$

hol tehát  $\varepsilon$ ,  $n$  és  $m$  mértékszámok a kritikus állandókkal mért nyomásnak, térfogatnak illetve hőmérsékletnek, akkor a  $p$ ,  $v$  és  $T$  ez utóbbi értékeinek az eredeti egyenletbe való helyettesítése után, az eredeti VAN DER WAALS-féle egyenlet az

$$\left( \varepsilon + \frac{3}{n^2} \right) (3n - 1) = 8m$$

alakú egyenletté lesz, mely már nem tartalmaz többé az anyag természetétől függő állandókat és így általános érvénnyel bír minden anyagra nézve. Ez az egyenlet a VAN DER WAALS-féle redukált egyenlet. E redukált egyenlet alapján az összes anyagok isothermái azonos görbesereggé válnak, mihelyest a nyomás, térfogat



*és hőmérséklet mérésére minden egyes anyagnál a kritikus állapotokat fogadjuk el mértékegységül. Az ily isothermákat VAN DER WAALS redukált isothermáknak nevezi. A különböző testeknek azon állapotai (nyomást, térfogatot és hőmérsékletet illetőleg), melyek a redukált isothermák egy és ugyanazon pontja által vannak meghatározva, megfelelő állapotoknak nevezetnek.*

A megfelelő állapotok fogalmának bevezetésével eltűnik az anyagok különbözősége, a mennyiben az állapot-változások, összevéve a gáz-, túlhevített gőz-, telített gőz- és folyékony-állapotot, az összes anyagoknál egy és ugyanazon törvény és pedig a Van der Waals-féle redukált egyenlet által kifejezett törvény szerint, teljes folytonossággal mennek végbe. Ebben áll VAN DER WAALS megfelelő állapotokra vonatkozó törvénye.

I. A legutóbbi időben sokan foglalkoztak VAN DER WAALS megfelelő állapotokra vonatkozó törvényének igazolásával. Az eredmények némelyeknél igazolták e törvényt, másoknál azonban ellent mondtak annak. Ezek az igazolások leginkább e gőzök maximális feszültségére és a megfelelő sűrűségekre vonatkoztak, a hőmérsékletnek és a nyomásnak szűk határai között.

Ezeket az igazolásokat azonban az a nagy hiba jellemzi, hogy azok támaszkodnak a kritikus állandók numerikus értékeire, holott ismeretes dolog, hogy ez állandókat illetőleg még mindig elég nagy bizonytalanságban mozgunk. Másrészt a redukált egyenlet, mely a nyomás, térfogat és hőmérséklet közt fentálló összefüggés kifejezésére elfogadott függvénynek egy tisztán analitikai tulajdonságát fejezi ki, csak szűk határok között felel meg a kísérleti adatoknak. Lehetséges ugyan, hogy az a függvény, mely pontos kifejezője ennek az összefüggésnek, szintén bír ugyanazzal a tulajdonsággal. Ezt azonban nem szabad előre feltételeznünk. Egyáltalán kérdés, hogy valóságos törvénnyel van-e itt dolgunk, vagy pedig csak közelítő kifejezéssel, mely csakis a kritikus pont közelébe eső nyomási és hőmérsékleti viszonyok között áll fenn.

Minthogy ennek a törvénynek az ismerete elég nagy fontossággal bír, azt hiszem, hogy érdemes ezt a szóban forgó törvényt általánosabb természetű igazolásnak alávetni, mint a milyenek voltak



az eddigi igazolások. Szükséges, hogy ez az igazolás független legyen a kritikus állandók numerikus értékétől, továbbá, hogy független legyen a  $f(p, v, t)=0$  összefüggés kifejezésére elfogadott függvénynek bárminemű alakjától. Ezeknek a kívánalmaknak felel meg a következő módszer:

A megfelelő állapotok törvénye legáltalánosabban így fogalmazható: Ha bármely két anyaghoz elkészítjük ugyanazon lépték szerint az isothermák seregét, miután a térfogatot és a nyomást a kritikus állandókkal mértük, kell, hogy az isothermák e két serege úgy legyen egymás fölé helyezhető, hogy azok teljesen fedjék egymást, szóval a két görbe seregnek összeillőnek kell lenni. Ez egymásra helyezés után a két görbe sereg az isothermák sorrendjét és alakját illetőleg úgy fog feltűnni előttünk, mintha azok egyetlen egy anyagra vonatkoznának.

Következőleg, ha két anyagra nézve a tetszőleges mértékegységekre vonatkozó isothermák serege tetszés szerinti léptékek alkalmazásával van ábrázolva — mivel az egységnek változtatása lényegben nem más, mint lépték változtatás a koordináta tengelyen — kell, hogy az isotherma-seregnek egyike, valamelyik tengely irányába eső kiterjeszkedés vagy összehúzódás által hasonlóvá legyen a másik isotherma-sereghez. Ezután csak kellő mértékben kell nagyobbitani vagy kisebbíteni az egyik görbesereget, természetesen úgy, hogy ez alatt hasonló maradjon önmagához, s a két isotherma-sereg össze fog esni, azaz egybevágó lesz.

A kísérlet leírását egészen AMAGAT saját szavaival adjuk.

A kísérlet véghezvitelére mindenekelőtt photographikus úton üvegen állítottam elő ezeket az idomokat. Ez úton minden nehézség nélkül, tisztán tudtam oly képeket előállítani, melyek 1 cm—2 cm-es oldallal bíró négyszögekbe esnek. Igen szép ábrákat lehet előállítani ezüstlaktat lemezekkel.

A különböző anyagokhoz ily módon készített rajzok közül kettőt felállítottam az optikai padra. Az elsőt úgy, hogy azt a saját síkjában forgatni lehessen a tengelyek irányának változtatása szempontjából, s hogy azután horizontális és vertikális irányban, azaz a tengelyekkel párhuzamosan is el lehessen tolni. A második üveg-



lemez pedíg úgy helyeztem el, hogy a két tengely körül, vagy a mi egyre megy, azokkal párhuzamos két egyenes körül, lehessen forgatni. Egy a két üveglap közé helyezett, nagy gyújtó-távolsággal bíró tárgylencse segítségével rá lehetett vetni az első idomnak a képét a másodikra.

Az így származott két képet azután egy oculár segítségével vizsgáltam, mely oculár a második üveglemez előtt volt erre a célra felállítva.

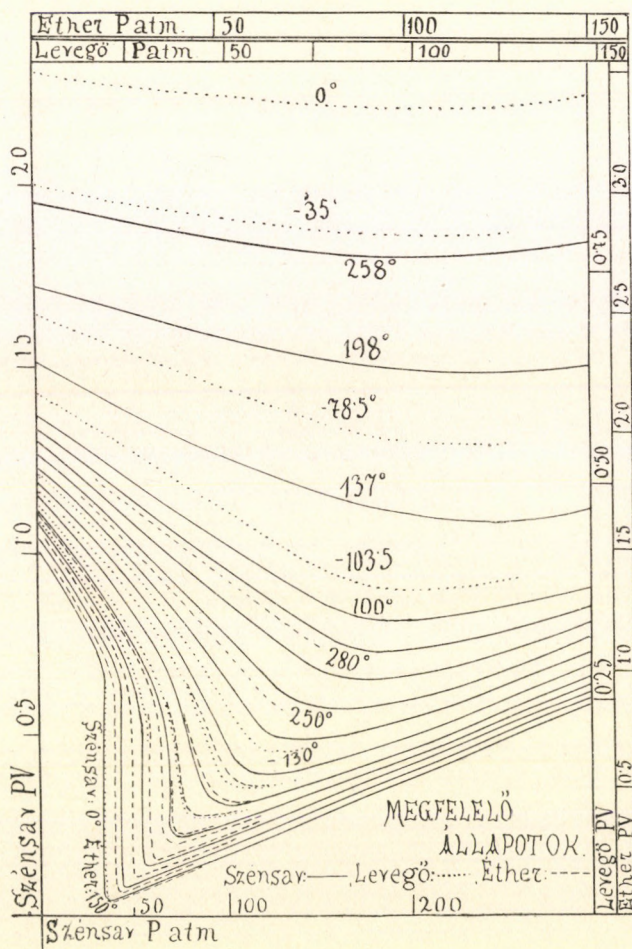
Ha a második rajzot forgatjuk az egyik tengelye körül, akkor a rajta levő isoterma-sereg mintegy összehúzódik a másik tengely irányában, úgy hogy a fentebb mondottak szerint, ha igaz a szóban levő törvény, akkor a kellőképen megválasztott forgási tengely körül történő megfelelő forgatás után, a második idom hasonló lesz az elsővel. Ezután ha változtatjuk a rajzoknak az objektívtől való távolságát, oly nagyságot adhatunk az első rajz projiciált képének, hogy az a másodtk rajzot teljesen fedhesse, a mit egy kis próbálgatás után könnyen el lehet érni.

Hogy el ne torzúljon a projiciált görbe sereg tengelyei által képezett szög, azért használtam a kísérletnél igen kis méretekkel bíró rajzokat és nagy gyújtó-távolsággal bíró tárgy lencsét.

A kísérletekhez természetesen oly anyagokat választottam, melyekre nézve lehető leg szélesebb körre terjednek az adataink. A szén-sav és az etilén igen alkalmas anyagok ezekhez az igazolásokhoz. E két anyagra nézve egészen 1000 atmosféráig elkészítettem az isothermák seregét, úgy hogy azok magokban foglalják a kritikus pontokat is. Kár, hogy a többi szintén elég tág határok között tanulmányozott gázok, mint az oxigén, a nitrogén és a hidrogén, nem oly alkalmasak az összehasonlításra — kivált az oxigén — mert ezeknek már a legalacsonyabb isothermái ( $0^{\circ}$ ) is, tekintettel lévén a megfelelő hőmérsékletekre, kívül esnek a szén-sav isoterma seregén, úgy hogy a görbe seregeknek nincsenek közös részei. Ami azokat az eredményeket illeti, a melyekhez az aránylag elég nagyszámú folyadékoknál jutottam, minthogy azok a szó szoros értelmében vett folyadékokra vonatkoznak, éppenséggel nem hasznosíthatók jobban ezeket a tanulmányokat illetőleg. Végre



a tényleg meglevő adatok, melyek alkalmasak volnának ilyen összehasonlításra, rendkívül ritkák és a nyomást illetőleg rend-



1. ábra.

szerint igen szűk határokra szorítkoznak. Úgy látszik, hogy az éter és a levegő isothermái a legérdekesebbek és én is ezeket használtam fel. Az éternek  $150^{\circ}$ — $280^{\circ}$  közé eső isothermái RAMSAY-nak és YOUNG-nak, a levegőnek  $-150^{\circ}$ -ig terjedő isothermái pedig



WITKOWSKI-nak köszönhetők. Ezeknek az anyagoknak az isoterma-serege a hőmérsékletek megfelelősége folytán bele esik a szénsav isotermaiba, sőt ennek általában a legérdekesebb részébe, mely magába foglalja a kritikus pontot. Ez anyagokat illetőleg abban a kedvező helyzetben vagyunk, hogy oly isothermákat hasonlíthatunk össze, melyeknél az abszolút hőmérsékletek közti különbség közel  $400^{\circ}$ -ra terjed. A nyomások határai azonban igen szűkek.

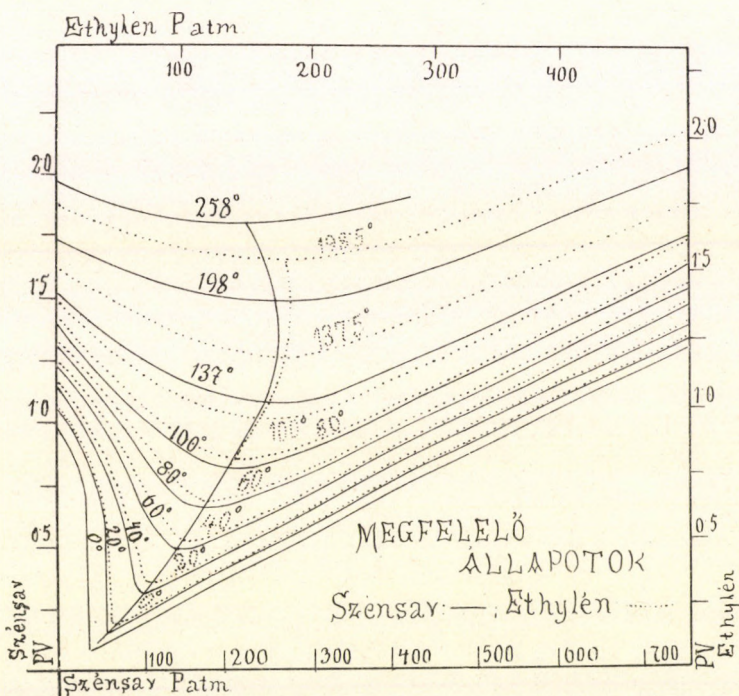
Elő lehetne állítani közvetlenül az egymásra helyezett isothermák fényképét is, de ez némi nehézséggel járna.

Az 1. ábra rajzban tünteti fel a levegőnek és az éternek a szénsavval való összehasonlítását. A szénsav isothermái folytonos vonallal vannak jelölve, míg az éternek és a levegőnek az isothermáit szaggatott, illetőleg pontozott vonalak ábrázolják. Látható, hogy ez a rajz a törvény mellett bizonyít, eltekintve néhány csekélyebb hibától, melyeket eléggé megmagyaráznak az itt fellépő kísérleti nehézségek. A szénsavnak  $0^{\circ}$ -hoz tartozó isothermája majdnem teljesen fűdi az éternek  $150^{\circ}$ -hoz tartozó isothermáját, s a többi isothermák pedig a kellő sorrendben hasonló alakkal lépnek föl. Látni lehet, hogy a minimális ordinátáktól kezdve, azon részben, hol az isothermák mintegy egyenesekké válnak, a vonalak párhuzamosan haladnak.

A 2. ábra a legkielégítőbb módon tünteti fel a szénsav és az etilén isothermáinak az összeesését (a szénsav görbéi folytonos vonalakkal vannak jelölve). Az idom egyszerű megtekintése feleslegessé tesz minden magyarázatot. Az idom egy egyedüli isotherma-sereg képét tünteti fel egyes részek kivételével, a mi olymódon kísérleti hibákból származik, a milyeneket lehetetlen kikerülni. Észre lehet azonban venni, hogy a minimális ordináták helyei szétválnak egymástól a felsőbb részekben, mert hisz e helyeken a görbék lapultsága némi bizonytalanságot idéz elő a horizontális érintők érintési pontjainak a meghatározását illetőleg. A két görbe sereg összeesését könnyen el lehet érni az isothermák oly deformációja által, mely megfelel a kísérleti hibákból származó különbözeteknek. Az alsó részekben, egészen  $100^{\circ}$ -ig, ott a hol a minimumok élesen tűnnek fel, a görbék fedik egymást.



Szóval úgy látszik, hogy VAN DER WAALS törvénye azon esetekre, melyek a vizsgálat tárgyát képezik, igazolva van; legalább oly megközelítéssel, a melyet a kísérletek csak megengedhetnek. Sajnos, hogy a tudomány ez idő szerint még nem rendelkezik mindazokkal a kísérleti adatokkal, a melyek szükségesek lennének ennek az igazságnak az általánosításához. Attól a néhány abnor-



2. ábra.

malis esettől, mint a milyenek pl. a gőzsűrűségeknél fordulnak elő, eltekintve, a mely különös esetek különben mit sem vonnak le ez eredmények fontosságából, elmondhatjuk, hogy a fentebb említett igazolások a molekuláris fizika egyik legszebb és legfontosabb törvényének általános jellegű érvényességét igazolják.

II. A különböző anyagok isoterma-seregének összeesése igen egyszerű módot szolgáltat arra, hogy valamely *B* anyag kritikus

állandóit meghatározhassuk, ha már ismerjük egy más  $A$  anyagnak a kritikus állandóit.

Az isothermák összeesésénél a két anyag kritikus pontjainak össze kell esnie. Ha tehát a görbe-seregek tengelyei számozott léptékekkel vannak ellátva, csak le kell olvasni a  $B$  anyagra vonatkozó rajzon azokat a koordinátákat, melyek ráesnek az  $A$  anyagra vonatkozó rajzon, az  $A$  anyag kritikus pontjának a koordinátáira, mely koordináták, a mint említettük, ismeretesek s a melyeket éppen ezért a rajzban szembe tűnőbben is fel lehet tüntetni. Ily módon, közvetlenül az idom útján jutunk el a  $B$  anyagra nézve, a  $p$  és  $pv$ -nek kritikus értékéhez; vagy még egyszerűbben, a mi különben teljesen egyre megy, ha megszorozzuk az  $A$  anyag kritikus  $p$  és  $pv$  értékeit a megfelelő tengelyek léptékeinek viszony-számával. Ezt a viszonyszámot legelőnyösebben a tengelyek végső részeinek a felhasználása által határozhatjuk meg, mert így a leolvasásból származó hibát a minimumra szállíthatjuk le. Ily módon eljuthatunk tehát a  $B$  anyag kritikus nyomásához és térfogatához.

A kritikus térfogat annyi súlyú anyagnak a térfogata, mint a mennyit meghatároznak a görbe konstruálására szolgáló számok. Az itteni táblázatokban 1 liter  $0^\circ$  hőmérséklettel bíró és egy atmosfera nyomású gáz anyagmennyisége szerepel.

A kritikus hőmérséklet megtalálására épen így járunk el. Erre nézve felhasználhatjuk a két görbe-sereg isothermáinak a  $pv$  tengelylyel való metszési pontját. Ezek az ordináták arányosak az abszolút temperaturákkal, mivel a görbék úgy tűnnek fel, mintha egy és ugyanazon anyaghoz tartoznának. Különben is össze kell esni a kritikus görbéknek s éppen ezért a  $B$  anyag kritikus hőmérsékletét úgy kapjuk meg az  $A$  anyag kritikus hőmérsékletéből, ha ez utóbbit megszorozzuk a  $pv$  tengely két megfelelő léptékének a viszonyszámával.

Az  $A$  anyagnak olyannak kell lenni, hogy kritikus állandói kísérleti úton lehetőleg könnyen meghatározhatók legyenek. AMAGAT  $A$  anyag gyanánt a szénsavat választja, a melynek kritikus állandóit még 1892-ben határozta meg. Ez alapon aztán a szén-



sav kritikus állandóiból az etilén, az éter és a levegő kritikus állandói számára a következő értékeket kapta:

	Szénsav	Etilén	Éter	Levegő
Kritikus hőmérséklet	31·35°	8·8°	19·5°	—140·7°
Kritikus nyomás	72·9 atm.	48·5 atm.	36·5 atm.	35·9 atm.
Kritikus sűrűség *	0·464	0·212	0·253	0·344

Ezeknek az adatoknak a pontossága első sorban a szénsav adatainak a pontosságától függ, azután pedig a legtökéletesebb összesítés megítélésétől, a mi bizonyára némi ingadozásra ad alkalmat. Mindazonáltal ez eredményeknek a különböző észlelők adataival való összehasonlítása arra enged következtetni, hogy ez az eljárás is bír oly pontossággal, mint a milyenre számíthatunk a közvetlen úton való meghatározással. Sőt az első eljárásnál, bizonyos különös esetekben, nagyobb is lehet az elért pontosság. Különösen áll ez a kritikus sűrűség meghatározása esetén, mert a kritikus sűrűség kísérleti meghatározása sokkal több nehézséggel jár, mint a kritikus nyomásnak vagy éppen a kritikus hőmérsékletnek kísérleti úton való meghatározása.

Nem szabad itt figyelmen kívül hagyni, hogy az egymásra fektetés útján nyert állandók csoportja, függvénye az általa jellemzett görbe sereg minden egyes részének, és nem pedig csak annak a résznek, a mely a kritikus pont környékére esik. Éppen ezért nem szükséges épen a kritikus pont közelébe eső isothermák összesítésére támaszkodnunk, hanem mehetünk oly részekre, melyek a kritikus pontoktól távolabb esnek, a mely részeknek a meghatározása azonban kevesebb nehézséggel jár.

Látható az idomból, hogy a levegő és a szénsav isothermái a felfrajzolt részben úgy tűnnek fel, mintha azok egy és ugyanazon anyaghoz tartoznának. Kár, hogy ezek a vonalak a folyósodás környékén és ott, a hol egyenes vonalú alakot vesznek fel, hiány-

\* E táblázatban a kritikus térfogat helyett a kritikus sűrűség van felvéve, mert a kritikus sűrűség független a kísérleteknél használt anyag mennyiségétől, míg ez nem áll a térfogatra. Sz. M.



zanak. Epen úgy hiányzanak a megfigyelések azokról a különösen érdekes esetekről, midőn a használt anyag keverék. A folyósodás folyamata alatt a kevert gázok viszonya nem tartozik ugyanaz maradni a folyékony részben mint a telített gőzben. Ez a viszony változhatik a hőmérséklettel, s ez a körülmény dönt a valóságos kritikus pont léte vagy nem léte fölött.

Az is előfordulhat a bizonyos meghatározott arányú keveréknél, hogy a midőn a folyósodás folytonosan tart egészen a teljes folyósodásig és a származott folyadék, mint egy egységes anyag húzódik össze, az isothermák oly képet tárnak elénk, mint egy oly egyedüli anyagnak isotherma-serege, mely anyag eleget tesz a megfelelő állapotok törvényének. Ezeknek a körülményeknek a szem előtt tartása mellett lesznek a fentebbi adatok a levegőnek, mint keveréknek, kritikus állandói.

III. YOUNG S. alacsony nyomásokhoz tartozó forrási hőmérsékletek mellett tett összehasonlítást a különböző anyagoknak, megfelelő hőmérsékletek mellett fellépő feszültségei között, s feltétvén, hogy a telített gőzök úgy viselkednek mint a tökéletes gázok, arra az eredményre jutott, hogy: *Megfelelő hőmérsékletnél, a telített gőzök feszültségének és fajlagos térfogatának a szorzata, osztva az abszolút hőmérséklettel egy és ugyanazon quotiensehez vezet az összes anyagoknál.*

Megjegyzendő, hogy itt, a változók minden anyagnál ugyanazon mértékekkel vannak mérve.

Az imént mondottakból könnyen következtethetünk YOUNG-nak e tételére.

Ha kiválasztjuk két anyagnak,  $T$  és  $T'$  megfelelő abszolút hőmérsékletekhez tartozó két isothermáját, s az első isothermán felvesszünk két pontot  $A$ -t és  $B$ -t, s a másodikon pedig az  $A$  és  $B$  pontoknak megfelelő  $A'$  és  $B'$  pontokat, akkor ezen pontok ordinátái lesznek  $(pv)_A$ ,  $(pv)_B$ ,  $(p'v')_{A'}$  és  $(p'v')_{B'}$ . Feltételezzük itt, hogy az  $A$  és  $B$  pontokhoz tartozó  $p$  és  $p'$  nyomások igen kicsinyek.

Az  $A$  és  $B$  pontok ordinátáit ha megszorozzuk egy és ugyanazon kellőképen választott faktorról, akkor azok egyenlőkké lesznek az  $A'$  és  $B'$  pontokhoz tartozó ordinátákkal, miután szorzás



által a  $p$  és  $p'$  nyomások egyenlővé tehetők, s így a megfelelő  $A$  és  $A'$  továbbá  $B$  és  $B'$  pontok össze fognak esni.

Kell tehát, hogy :

$$\frac{(pv)_A}{(p'v')_{A'}} = \frac{(pv)_B}{(p'v')_{B'}}.$$

Ezenkívül, miután itt megfelelő nyomások szerepelnek, a  $(pv)_A$  és  $(p'v')_{A'}$  ordinátákat úgy tekinthetjük, mint egymásra eső kezdetbeli ordinátákat ; végre is az összeesés alkalmával úgy szerepelnek ezek az ordináták, mintha egy és ugyanazon anyaghoz tartoznának, és így azok arányosak az abszolút hőmérsékletekkel.

Tehát :

$$\frac{(pv)_A}{(p'v')_{A'}} = \frac{T}{T'},$$

vagy általánosságban :

$$\frac{pv}{T} = C.$$

Látható tehát, hogy Young törvénye nem vonatkozik kizárólag csak a maximalis feszültségekre (és következésképen, a kritikus pontra mint határra), hanem hogy az érvényes bármely két megfelelő pontra. E törvény kimutatása semmiféle új hypotesist sem igényel a telített gőzöket illetőleg. Ugyancsak ezt lehet mondani a többi különféle megfelelő állapotokra vonatkozó törvényekre is. Mindezek a törvények beláthatók, és pedig nagyrészt a legnagyobb könnyedséggel, az isoterma-seregek egymásra helyezhetőségéből.

*Szijártó Miklós.*

## MEGOLDOTT FELADATOK.

25. Ha az  $ABC$  háromszög magasságpontja  $M$  és a  $BCM$ ,  $CAM$ ,  $ABM$  háromszögek körül írt körök középpontjai  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ; bizonyítsd be, hogy az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszögek kongruensek. (VÁLYI.)

★

*Hatodik megoldás Lévay Ede főgymnasiumi tanár úrtól Nyitrán.*

E tétel elemi úton a következőképen bizonyítható be. Az  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  pontok szerkesztéséből kitűnik, hogy  $AC \parallel A_1C_1$ , mert  $AC \perp BM$  és  $A_1C_1 \perp BM$ -re. Továbbá,  $BC \parallel B_1C_1$ , mert  $BC \perp AM$  és  $B_1C_1 \perp AM$ -re. E két vonal párhuzamosságából következik, hogy:  $C \sphericalangle = C_1 \sphericalangle$ .

Hasonló eljárással kimutatható, hogy:  $A \sphericalangle = A_1 \sphericalangle$ .

Ha most még ki tudom mutatni, hogy  $AC$  egyenes egyenlő  $A_1C_1$ -gyel, akkor a két háromszögben egy oldalnak s a rajta fekvő két szögnek egyenlősége megállapítja a háromszögek kongruenciáját.

Emre pedig az  $ACNC_1$  és  $A_1C_1LC$  trapézok kongruenciája fog bennünket reávezetni; ezekben ugyanis  $LC_1 = NC$  és  $LC = NC_1$  oldallal, mint párhuzamosak közt fekvő párhuzamos vonalдарabok; továbbá  $C \sphericalangle = C_1 \sphericalangle$  és  $CA_1 = AC_1$  oldallal.

Ez utóbbi egyenlőség igazolására kössük össze az  $M$  pontot az  $A_1$  és  $C_1$  pontokkal; továbbá a  $B$  pontot ugyane pontokkal.

Akkor:

$$A_1BC_1 \triangle \cong A_1M_1C \triangle.$$

mert:

$$A_1M = A_1B,$$

$$A_1C_1 = A_1C_1$$

$$MA_1C \sphericalangle = BA_1C_1 \sphericalangle;$$

a honnan:

$$C_1BA_1 \sphericalangle = A_1MC_1 \sphericalangle:$$



ez azonban csak úgy lehetséges, ha a szögszárak párhuzamosak, azaz : ha  $C_1M \parallel A_1B$  és  $BC_1 \parallel A_1M$ . Ámde akkor  $A_1M$  és  $BC_1$ , mint párhuzamosok közt fekvő párhuzamosok egyenlők egymással, vagyis az  $A_1$  középponthoz tartozó kör sugara egyenlő a  $C_1$  középponthoz tartozó kör sugarával, tehát  $A_1C$  is egyenlő  $CA_1$ -gyel, a mivel a jelzett trapézek kongruenciája be lévén igazolva, következik, hogy :

$$AC = A_1C_1,$$

a mivel az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszögek kongruenciája meg van állapítva.

A fentebbieknek egyszerű következménye a következő két tétel :

1. Mind a három körülírt kör sugara egyenlő ; és
2. Az  $M$  pont középpontja az  $A_1B_1C_1$  háromszög körülírható körnek.

\*

*Hetedik megoldás Doroghi Ignác főreáliskolai tanár urtól  
Temesvároztól.*

A magassági szeletekre nézve ismeretesek a következő relációk ;

$$AM = a \cdot \cotg A ; BM = b \cdot \cotg B ; CM = c \cdot \cotg C.$$

Ha az  $AMB$ ,  $BMC$  és  $CMA$  háromszögek magasságait  $m_3$ ,  $m_1$  és  $m_2$  betűkkel jelöljük, akkor lesz :

$$m_3 = a \cdot \cotg A \cdot \cos B ; m_3 = b \cdot \cotg B \cdot \cos C ; m_2 = c \cdot \cotg C \cdot \cos A.$$

Ha továbbá az  $AMB$ ,  $BMC$  és  $CMA$  háromszögek területeit  $t_3$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  és az ezen háromszögek körül írt köröknek sugarait  $R_3$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  betűkkel jelöljük, akkor

$$t_3 = \frac{c}{a} a \cotg A \cos B \text{ és } R_3 = \frac{a \cotg A b \cotg B c}{2 ac \cotg A \cos B} = \frac{b}{2 \sin B}$$

$$\text{mivel azonban } \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C} = \frac{a}{2 \sin A} = R,$$

következik, hogy az  $AMB$ ,  $BMC$  és  $CMA$  háromszögek körül írt köröknek sugarai mind egyenlők az eredeti  $ABC \triangle$  körül írt körnek sugarával, azaz :  $R_1 = R_2 = R_3 = R$ .

Ha az  $A_1B_1C_1$  pontokat összekötjük  $M$ -mel és meghúzzuk az  $A_1B$ ,  $A_1C$ ,  $B_1A$ ,  $B_1C$ ,  $C_1A$ ,  $C_1B$  segédvonalakat, akkor  $R_1 = R_2 = R_3$  következtében a  $C_1MA_1B_1$ ,  $A_1MB_1C$  és  $B_1MC_1A$  rhombusok keletkeznek és  $\sphericalangle CA_1B = \sphericalangle B_1NC_1$ , a miből következik, hogy  $\triangle CBA_1 \cong \triangle B_1CM$  és így  $B_1C_1 = BC$ ; épen így mutatható ki, hogy  $A_1B_1 = AB$  és  $A_1C_1 = AC$

és hogy a hét háromszög megfelelő oldalai egymással párhuzamosak, minélfogva  $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ .

A mondottakból az is kitűnik, hogy  $A_1B_1C_1$  körül írt körnek középpontja az  $M$  magassági pont (és sugara szintén  $= R$ ).

*Nyolczadik megoldás Péch Aladár tanárjelölt úrtól Budapesten.*

A bebizonyítandó tétel helyességét igen egyszerűen kimutathatjuk, a FEUERBACH tételének felhasználásával.

Az  $A_1B_1C_1$  háromszög szerkesztésének módjából kitűnik, hogy:

$$AB \parallel A_1B_1; BC \parallel B_1C_1; CA \parallel C_1A_1.$$

Ugyancsak ebből következik, hogy ha megszerkesztem az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszögek magasságvonalaait, a megfelelő magasságvonalak párhuzamosak lesznek egymással. Ha a két háromszög magasságpontjait  $M$ , illetve  $M_1$ -el jelölöm s megszerkesztem  $ABC$  súlypontját  $S$ -et és  $V$  az  $AC$  oldal felezőpontja, akkor az  $MBS$  és  $M_1VS$  háromszögek hasonlósága folytán:

$$MS : M_1S = VS : BS = VM : BA = 2 : 1,$$

a honnan következik, hogy  $M_1$  az  $ABC$  háromszög köré írt kör középpontja. Ha az  $A_1B_1C_1$  háromszög súlypontja  $S_1$  és  $V_1$  az  $A_1C_1$  oldal felezőpontja, akkor:

$$MV_1S_1 \sim M_1B_1S_1$$

tehát:

$$M_1S_1 : MS_1 = V_1S_1 : B_1S_1 = V_1M_1 : B_1A_1 = 2 : 1,$$

vagyis  $M$  az  $A_1B_1C_1$  háromszög köré írt kör középpontja.

FEUERBACH tételének segítségével ki fogjuk mutatni, hogy van egy pont a síkban, a mely körül forgatva az  $ABC$  háromszöget, ezt az  $A_1B_1C_1$  helyzetbe lehet hozni. Tényleg találunk is ilyen pontot. Ha  $T$ , illetve  $T_1$  az  $AC$ , illetve  $A_1C_1$  oldalon levő magasságpont, akkor a  $VTV_1T_1$  derékszögű négyzög  $VV_1$  és  $TT_1$  átlóinak metszéspontját  $O$ -val jelölve:

$$OV = OT = OV_1 = OT_1;$$

látjuk ebből, hogy ezen  $O$  az  $ABC$  háromszög FEUERBACH-körének középpontja s ugyancsak az  $A_1B_1C_1$  háromszög FEUERBACH-körének is. Mivel pedig:

$$OV = OV_1$$

a két háromszög FEUERBACH-köre ugyanaz, tehát az  $ABC$  háromszög az  $O$  pont körül forgatván, átvihető az  $A_1B_1C_1$  helyzetbe. Ezzel egyszersmind



be van bizonyítva az is, hogy az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszögek kongruensek.

Mivel  $O$  az  $ABC$  háromszög FEUERBACH-körének középpontja, világos az is, hogy  $O$  rajta van az  $MM_1$  egyenesen és pedig:

$$OM = OM_1.$$

★

Ugyan e feladat megoldását beküldték még: Dr. Lóky Béla kegyesrendi főgymnasiunai tanár Kolozsvárról és Benda Jenő műegyetemi hallgató úr.

*Szerk.*

## *A Matematikai és Fizikai Társulat tagjai:*

- |  |  |   |
|--|--|---|
| <p> <b>Ábrahám István</b><br/> <b>Abt Antal</b><br/> <b>Anderkó Aurél</b><br/> <b>Anghoben Albin</b><br/>                     5 <b>Antolik Károly</b><br/> <b>Arany Dániel</b><br/> <b>Aranyossi Miksa</b><br/> <b>Arató Frigyes</b><br/> <b>Asbóth Emil</b><br/>                     10 <b>Avéd Jákó</b><br/> <b>Azary Miklós</b> </p>  | <p> <b>Bozmánszky Gyárfás</b><br/>                     40 <b>Bozóky Endre dr.</b><br/> <b>Bozzay Zoltán</b><br/> <b>Bretz Berta</b><br/> <b>Bruckner Károly</b><br/> <b>Buchböck Gusztáv</b><br/>                     45 <b>Bujk Béla</b><br/> <b>Bukovszky János</b><br/> <b>Bukuresti B. János</b><br/> <b>Bulyovszky Sándor</b><br/> <b>Burkovits Lajos</b><br/>                     50 <b>Butorka Száva</b> </p> | <p>                     75 <b>Ellend József</b><br/> <b>Eltscher Simon</b><br/> <b>Eötvös Lóránd b. dr.</b><br/> <b>Erdődy Imre</b><br/> <b>Etele Károly</b> </p>   |
| <p> <b>Balog Gyula</b><br/> <b>Balog Mór</b><br/> <b>Barabás Jenő</b><br/>                     15 <b>Baranyi Balázs</b><br/> <b>Barkáts Mariska</b><br/> <b>Bartha Zsigmond</b><br/> <b>Bartonic Géza</b><br/> <b>Bauer Mihály</b><br/>                     20 <b>Bein Károly</b><br/> <b>Beke Manó dr.</b><br/> <b>Bellágh Kálmán</b><br/> <b>Benda Jenő</b><br/> <b>Benkő Imre</b><br/>                     25 <b>Berecz Antal</b><br/> <b>Berkes Imre</b><br/> <b>Berkes Ottó</b><br/> <b>Bielek Miksa</b><br/> <b>Bláthy Ottó</b><br/>                     30 <b>Bóbita Endre</b><br/> <b>Bod Lajos</b><br/> <b>Bodola Lajos</b><br/> <b>Bodola László</b><br/> <b>Bodor Domokos</b><br/>                     35 <b>Bogyó Samu</b><br/> <b>Bónis Károly</b><br/> <b>Boros Sándor</b><br/> <b>Borossay Dávid</b> </p> | <p> <b>Csajkás Mihály</b><br/> <b>Csehély Adolf</b><br/> <b>Csemez József</b><br/> <b>Csillag Vilmos</b><br/>                     55 <b>Csomóssy Sándor</b><br/> <b>Csopey László</b><br/> <b>Csorba György</b><br/> <b>Czakó Adolf</b><br/> <b>Czekelius Aurél</b><br/>                     60 <b>Czigler Győző</b> </p>  | <p>                     80 <b>Fabus Alajos János</b><br/> <b>Fabinyi Rezső</b><br/> <b>Fábry Emil dr.</b><br/> <b>Fail Atilla dr.</b><br/> <b>Farbaky István</b><br/>                     85 <b>Farkas Gyula dr.</b><br/> <b>Feichtinger Győző</b><br/> <b>FEHÉR IPOLY p. t.</b><br/> <b>Fekete Jenő</b><br/> <b>Félegyházy Antal</b><br/>                     90 <b>Félix János</b><br/> <b>FÉNYES DEZSŐ ö. t.</b><br/> <b>Ferenczy István</b><br/> <b>Ferenczy József</b><br/> <b>Fertig Vilmos</b><br/>                     95 <b>Ficsor József</b><br/> <b>Fodor László dr.</b><br/> <b>Fogarassi Béla</b><br/> <b>Földes Izabella</b><br/> <b>Németh Zsigmondné</b><br/> <b>Fölser István</b><br/>                     100 <b>Frank István</b><br/> <b>Fraunhofer L. dr.</b><br/> <b>Frosch Károly dr.</b><br/> <b>FRÖLICH IZIDOR dr.</b><br/> <b>ö. t.</b> </p> |
|  | <p> <b>K. Danch Ferencz</b><br/> <b>Demetzky Mihály dr.</b><br/> <b>Demeter István</b><br/> <b>Dietz E. Lajos</b><br/>                     65 <b>Dirner Gusztáv dr.</b><br/> <b>Dischka Győző</b><br/> <b>Dobay Sándor</b><br/> <b>Dobszay Antal dr.</b><br/> <b>Dohnányi Frigyes</b><br/>                     70 <b>Dózsa Jakab</b><br/> <b>Dsida Ottó</b> </p>   |   |
|  | <p> <b>Eberhardt Béla</b><br/> <b>Eberling József</b><br/> <b>Edelmann Sebő dr.</b> </p>   | <p>                     105 <b>Gerecz Lajos</b><br/> <b>Gerevich Emil dr.</b><br/> <b>Gidófalvy Géza</b><br/> <b>Gidró Bonifác</b><br/> <b>Göllner Károly</b> </p>  |



- Gotthard Jenő He-  
 rényi  
 110 Grexa Lóránd  
 Grósz Ferencz  
 Groszbauer József  
 Gruber Nándor  
 Grünwald Miksa  
 115 Guta József  
 Hahóthy Sándor  
 Halmi Janos  
 Harkányi Béla b. dr.  
 Hassák Vidor  
 120 Hauszmann Alajos  
 Havas Miksa  
 Heinrich Theophil  
 Held Károly  
 Heller Ágost dr.  
 125 Heller Richárd  
 Héjas Endre  
 Heuer Ede  
 Hirschmann Nándor  
 Hlatky Miklós  
 130 Hoor Mór dr.  
 Homor István  
 Hopp Ferencz p. t.  
 HORNIG KÁROLY br.  
 dr. p. t.  
 Horti Henrik dr.  
 135 Horostyák Gyula  
 Hortobágyi Zsig-  
 mond  
 Horváth József dr.  
 Horváth Mátyás  
 Hőgyes Endre dr.  
 140 Hubatsek Alajos  
 Husvay Lajos dr.  
 Inczedy Dénes  
 Iszlay József dr.  
 Janell József  
 145 Javorik János  
 Jeney Pál  
 Jónás Ödön  
 Juckel Gyula dr.  
 Jurányi Henrik  
 150 Kacsóh Pongrácz  
 Kados Aladár  
 Kalecsinszky Sándor  
 KANITZ ARISTID ö. t. +  
 Kappel György  
 155 Karai Sándor  
 Kármán Ferencz  
 Károly J. Irén dr.  
 Károlyi Lajos  
 Karvázy Zs. dr.  
 160 KEGYES TANÍTÓREND  
 p. t.  
 Kemény Ferencz dr.  
 Képesy Imre  
 Kerekes Dezső  
 Keresztély Lajos  
 165 Kherndl Antal  
 Kilián Frigyes  
 Király László  
 Kirchknopf András  
 Kiss Dénes  
 170 Kiss E. János  
 Kiss Gábor  
 K. Kiss József  
 Kiss Károly dr.  
 Fr. Kiss Károly  
 175 Kiss Tamás  
 Klatt Virgil  
 Klein Pál  
 Kleiszner Rezső  
 Klimkó Mihály  
 180 Klúg Lipót dr.  
 Klúg Nándor  
 Klupathy Jenő dr.  
 Kmety János József  
 Kohányi Gyula  
 185 Konkoly Miklós dr.  
 Kont Gyula dr.  
 Kopp Lajos dr.  
 Korbuly Emil  
 Korda Dezső  
 190 Koschovitz Gyula  
 Kosztolányi Árpád  
 Kovács Ferencz  
 Kovács István  
 Kovács János dr.  
 195 König Gyula dr.  
 Kőszeghy Winkler  
 Antal  
 Kövesligethy R. dr.  
 Kövi Imre  
 Kronith Lénárd  
 200 Krüger Viktor  
 Kukla István  
 KUNCZ ADOLF dr. p. t.  
 Kunstädter Rezső  
 Kurländer Ignác  
 205 Kúthy József dr.  
 KÜRSCHÁK JÓZSEF ö. t.  
 Lakits Ferencz dr.  
 Láng Emil  
 Layer Antal dr.  
 210 Lázár Pál  
 Lendvay Húgó  
 Lengyel Béla dr.  
 Lengyel Imre  
 Lengyel István  
 215 Lengyel Sándor  
 Lesska Ferencz  
 Lévay Ede dr.  
 Liphay Sándor  
 Lóky Béla dr.  
 220 Lukácsy György  
 Lukáts László  
 Lutter János  
 Magdics Gáspár  
 Magyar László  
 225 Majoros Endre  
 Makai István  
 Malatin Gotthárd  
 Malesevíts Miklós  
 Mandák Dezső  
 230 Marcsiss János  
 Markoss Imre  
 MARTIN LAJOS p. t. +  
 Mátray Rudolf  
 Mauritz Rezső  
 235 Medreczky István  
 Medveczky Lajos  
 Medvigy János  
 Mendlik Ferencz  
 Mialovich Mór  
 240 Mihalovics Alajos  
 Miklós Ödön  
 Mikola Sándor  
 Miller Gyula  
 MOLDOVÁNYI ISTVÁN  
 245 Molnár Aladár  
 Módly Krizsó  
 Muraközy Karoly



- Müller József
- Nagy Dezső
- 250 Nagy V. Pál
- Nesnera Aladár
- Neumann Jenő
- Neustadt Lipót
- Németh Antal dr.
- 255 Niedermayer Gyula
- Nikolics Lázár
- Novothny Endre
- Nuricsán József dr.
- Oberle Károly**
- 260 Ondrus Pál
- Orbán Antal
- Oszlaczky Szilárd
- Osztrogonác János
- Palágyi Menyhért**
- 265 Palatin Gergely
- Pallagi Gyula
- Pallos Béla Kajetán
- Pap János
- Pap József
- 270 Pap Lajos
- Péch Aladár
- Pecz Samu
- Pék János
- Pekár Dezső
- 275 Perényi Kandid
- Perényi Vilmos
- Perger József
- Perjessy László
- Pethő Menyhért
- 280 Petry Gyula
- Pfeiffer Ferdinánd
- Pfeiffer Péter dr.
- Pilcz Ottó
- Pizetti Rókus
- 235 Plischka Norbert
- Plósz Pál dr.
- Polreczky Jolán
- Potomesik Ignác
- Priváry József
- 290 Privorszky Alajos
- Prokess Ignác
- Rados Gusztáv**
- Rados Ignác
- Ráth A. Lajos
- 295 Ratkovszky Pál
- Rátz László
- Récsei L. Farkas
- Rejtő Sándor
- Renner János
- 300 Réthy Mór ö. t.
- Riegl Sándor
- Riegler Sándor
- ROMBAUER EMIL ö. t.
- Róna Zsigmond
- 305 Rózsa István
- Rucsinszky Lajos
- Sárgay Antal
- Sárkány Lajos dr.
- Schenek Gyula
- 310 Schenek István dr.
- Schimanek Emil
- Schlesinger L. dr.
- Schmidt Ágost dr.
- Schmidt Ferencz
- 315 Schmidt János dr.
- Schmidt Sándor dr.
- Scholtz Ágost dr.
- Schöndorfer Gyula
- Schuller Alajos
- 320 Schuller János
- Schwarz Ottó dr.
- Schwiecker Alf. dr.
- Serédy Marczell
- Simon Ferencz
- 325 Simon Tádé
- Simkó József
- Sinkovits Ferencz
- Skopál István
- Somogyi István
- 330 Soós Mihály
- Söpkéz Sándor
- Stahl Géza
- Stanics Fulgent
- Stark Lipót
- 335 Stauber József
- Stephani Ervin
- Steécz György dr.
- Steindl Imre
- Steiner Lajos dr.
- 340 Steiner Miklós
- Steiner Simon dr.
- Straub Sándor
- Strausz Ármin
- Strobach Géza
- 345 Süss Nándor
- Suták József dr.
- Szabó Ádám
- Szabó János
- Szabó József Bp.
- 350 Szabó József Vác
- Szabó Péter dr.
- Szakmáry József
- Szalay István
- Szarvassy Margit
- 355 Szavkay Ede
- Széchy Ákos
- Székely Károly
- Székely László
- Széky István
- 360 Szekeres Kálmán dr.
- Szemethy Béla
- Szenessy Mihály
- Szentmiklóssy Jenő
- Szépréthy, Béla
- 365 Szerémi Alajos
- Szerényi Géza
- Szily Kálmán id.
- SZILY KÁLMÁN ifj. dr. ö. t.
- Szimányi Samu
- 370 Szijártó Miklós
- Szirtes Ignác
- Szokol Pál dr.
- Szontágh Gusztáv
- Szuppan Vilmos
- 375 **Takáts Gyula**
- Tangl Károly dr.
- Tatár Balázs
- Terlanday Emil
- Thán Károly dr.
- 380 Thanhoffer L. dr.
- Tolnay Lajos
- Torday Imre
- Tóth József
- Tötössy Béla
- 385 Trocsányi Gyula
- VÁLYI GYULA** dr. ö. t.
- Vámos Dezső
- Váncza Mihály
- Vater József



390	Vidovich Bonaven- tura	Walther Béla	Wittmann Ferencz
	Vigh Béla	Wartha Vincze dr.	
	Visnya Aladár	Weber Márton	Závodszky Adolf
	Vörös Cyrill	Weinhardt Ferencz	405 Zemplén Győző
		400 Willim Ferencz	Zettner Ede
		Winkler Lajos dr.	Zipernovszky K.
	Wagner Alajos dr.	Winter József	Zorkóczy Samu
395	Waldapfel János dr.		

---

### *Tagdíjat fizettek:*

**1894. évre:** Dirner Gusztáv dr., Fodor László dr., Konkoly Miklós dr., Mialovich Mór, Simon Ferencz.

**1895. évre:** Fodor László dr., Perjessy László, Süss Nándor.

**1896. évre:** Klupathy Jenő dr., Kont Gyula dr., Kövesligethy Radó dr., Torday Imre.

**1897. évre:** Anderko Aurél, Gerecz Lajos, Kövesligethy Radó dr., Niedermayer Gyula, Novothny Endre.

**1898. évre:** Kövesligethy Radó dr., Majoros Endre, Mikola Sándor, Perényi Kandid, Stark Lipót, Szabó Péter, Weber Márton.

**1899. évre:** Bauer Mihály, Bláthy Ottó, Bodola Lajos, Eberling József, Etele Károly, Fábry Emil, Ferenczy István, Fraunhoffer Lajos, Illosvay Lajos dr., Inczedy Dénes, Held Károly, Hortobágyi Zsigmond, Karai Sándor, Károly Irén dr., Kőszeghy Winkler Antal, Kövi Imre, Lesska Ferencz, Magdiés Gáspár, Módly Krizsó, Palatin Gergely, Pap János Perényi Kandid, Petry Gyula, Rados Gusztáv, Rátz László, Stauber József, Székely Károly, Szenessy Mihály, Terlanday Emil.

### *Előfizetési díjat fizettek:*

**1892—95. évre:** a budapesti V. ker. állami főreáliskola.

**1896. évre:** a budapesti V. ker. áll. főreáliskola, a VIII. ker. gyakorló főgymn.

**1897. évre:** a budapesti V. ker. áll. főreáliskola, a bpesti VIII. k. gyakorló főgymn., a pannonthalmi főapátsági könyvtár.

**1898. évre:** a bpesti VIII. k. gyakorló főgymn., a pannonthalmi főapátsági könyvtár.

**1899. évre:** a bpesti II. k. állami főreáliskola, a bpesti VI. ker. áll. főreáliskola, a dévai áll. főreáliskola, az egri áll. főreáliskola, a jászóvári



pr. kanonokrend közp. könyvtára, a kalocsai főgymn., a kaposvári áll. főgymn., a kecskeméti áll. főreáliskola, a körmöczbányai áll. főreáliskola, a pannonhalmi főapátsági könyvtár, a selmeczbányai k. k. nagygymn., a soproni evang. lyceum, a sepsi-szent-györgyi Székely Mikó Kollegium, a szamosujvári m. k. áll. főgymn. és annak ifjúsági könyvtára, a szegszárdi áll. főgymn., a székesfehérvári főreáliskola, Wokál János u óda N.-Enyeden, a zilahi ev. ref. főgymn.

*Feichtinger Győző,*  
pénztárnok.

## AZ INDUKÁLT HELYETTESÍTÉSEK ELMÉLETÉHEZ.

Tekintve, hogy a legújabb időben több, az indukált helyettesítések elméletére vonatkozó közlemény jelent meg, talán némi érdekel birhat, hogy RADOS tanár úrnak az indukált helyettesítések karakterisztikus egyenletének gyökeire vonatkozólag nyert eredményei speciális esetekben geometriai megfontolások alapján is bebizonyíthatók.\* Az alábbiakban a következő tételnek adom ilyenmő bebizonyítását:

*Ha az*

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 \\ y_2 &= a_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 \\ y_3 &= a_3 x_1 + \beta_3 x_2 + \gamma_3 x_3 \end{aligned} \quad (S)$$

*lineár helyettesítés karakterisztikus egyenletének gyökei:*

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

*akkor a másodfokú indukált helyettesítése karakterisztikus egyenletének, az*

$$\begin{vmatrix} a_1^2 - \mu & a_2^2 & a_3^2 & 2a_1 a_2 & 2a_1 a_3 & 2a_2 a_3 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 - \mu & \beta_3^2 & 2\beta_1 \beta_2 & 2\beta_1 \beta_3 & 2\beta_2 \beta_3 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2 - \mu & 2\gamma_1 \gamma_2 & 2\gamma_1 \gamma_3 & 2\gamma_2 \gamma_3 \\ a_1 \beta_1 & a_2 \beta_2 & a_3 \beta_3 & a_1 \beta_2 + a_2 \beta_1 - \mu & a_1 \beta_3 + a_3 \beta_1 & a_2 \beta_3 + a_3 \beta_2 \\ a_1 \gamma_1 & a_2 \gamma_2 & a_3 \gamma_3 & a_1 \gamma_2 + a_2 \gamma_1 & a_1 \gamma_3 + a_3 \gamma_1 - \mu & a_2 \gamma_3 + a_3 \gamma_2 \\ \beta_1 \gamma_1 & \beta_2 \gamma_2 & \beta_3 \gamma_3 & \beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1 & \beta_1 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_1 & \beta_2 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_2 - \mu \end{vmatrix} = 0 \quad (I)$$

\* Ily geometriai megfontolásokon alapuló bebizonyítás keresését RADOS tanár úr mint feladatot tűzte ki a műegyetemen tartott matematikai gyakorlatokon.



egyenletnek gyökei:

$$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \lambda_1\lambda_2, \lambda_1\lambda_3, \lambda_2\lambda_3.$$

Az  $S$  lineár helyettesítés, a melyről felteszszük, hogy determinánsa nem zérus, egy síkbeli kollineáció képviselőjének tekinthető. E kollineáció kettős pontjait a

$$\begin{aligned}\lambda_i x_1^{(i)} &= \alpha_1 x_1^{(i)} + \beta_1 x_2^{(i)} + \gamma_1 x_3^{(i)} \\ \lambda_i x_2^{(i)} &= \alpha_2 x_1^{(i)} + \beta_2 x_2^{(i)} + \gamma_2 x_3^{(i)} \\ \lambda_i x_3^{(i)} &= \alpha_3 x_1^{(i)} + \beta_3 x_2^{(i)} + \gamma_3 x_3^{(i)}\end{aligned}\quad (1)$$

( $i=1, 2, 3$ )

egyenletek jellemzik, a hol  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  az  $S$  karakterisztikus egyenletének gyökei; jelöljük e kettős pontokat rendre  $P_1, P_2, P_3$ -mal.

Hogy a szóban forgó tételt bebizonyítsuk, vessük fel a következő problémát: *melyek a síknak ama pontpárjai, a melyek az  $S$  képviselte kollineáció alkalmazásakor változatlanul maradnak?*

*Geometriailag* a kérdés könnyen elintézhető.

Legyen  $(A, B)$  valamely pontpár, a mely problémánk követeléseinek eleget tesz, azaz  $(A, B)$  az  $S$  kollineáció alkalmazásakor mint pontpár változatlanul marad, akkor könnyű szerrel ki fogjuk mutathatni, hogy ez csakis úgy lehetséges, hogy  $A$  is, meg  $B$  is az  $S$  kollineáció kettős pontja.

Ugyanis a történet feltevés mellett két eset lehetséges:

$$\begin{aligned}1. \quad S(A) &= A \\ S(B) &= B,\end{aligned}$$

ekkor önmagában világos, hogy  $A$  és  $B$  az  $S$  kollineáció kettős elemei.

$$\begin{aligned}2. \quad S(A) &= B \\ S(B) &= A,\end{aligned}$$

ekkor az  $S$  kollineáció megismétlésével az

$$\begin{aligned}S^2(A) &= S(B) = A \\ S^2(B) &= S(A) = B\end{aligned}$$

egyenlőségekre jutunk, a melyek mutatják, hogy  $A$  és  $B$  az  $S^2$  kollineáczióknak kettős elemei, de minthogy tudvalevőleg az  $S^2$  és  $S$  kollineáczió kettős elemei azonosak, kitűnik, hogy ebben az esetben is  $A$ -nak és  $B$ -nek az  $S$  kettős elemei között kell előfordulnia, de ez az

$$S(A) = B$$

$$S(B) = A$$

egyenlőségek mellett csakis úgy lehetséges, hogy az  $A$  és  $B$  pontok azonosak, úgy hogy e második esetben  $(A, B)$  oly pontpár, a mely az  $S$  kollineáczió ugyanazt a kettős pontját kétszer tartalmazza.

Ha tehát az  $S$  képviselte kollineáczió kettős pontjai:

$$P_1, P_2, P_3,$$

akkor a probléma összes megoldásait a

$$(P_1, P_1), (P_2, P_2), (P_3, P_3), (P_1, P_2), (P_1, P_3), (P_2, P_3)$$

pontpárok szolgáltatják.

Ismerve ily módon az összes megoldásokat, a feladat *analitikai tárgyalásából* következtethetünk az (I) alatti karakterisztikus egyenlet gyökeire.

Analitikailag fogalmazva a kérdés az, hogy melyek azok az  $x'$  és  $x''$  pontpárok, melyeknek egyenlete:

$$(x'_1 u_1 + x'_2 u_2 + x'_3 u_3)(x''_1 u_1 + x''_2 u_2 + x''_3 u_3) = 0 \quad (2)$$

az  $S$  képviselte kollineáczióknak megfelelő

$$u_1 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$

$$u_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3$$

$$u_3 = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3$$

transzformáczióknál csak állandó szorzóval változik? A transzformált egyenlet a  $v$ -k szerint rendezve a következő:

$$\begin{aligned} & [(a_1 x'_1 + \beta_1 x'_2 + \gamma_1 x'_3) v_1 + (a_2 x'_1 + \beta_2 x'_2 + \gamma_2 x'_3) v_2 + \\ & \quad + (a_3 x'_1 + \beta_3 x'_2 + \gamma_3 x'_3) v_3] \cdot \\ & \cdot [(a_1 x''_1 + \beta_1 x''_2 + \gamma_1 x''_3) v_1 + (a_2 x''_1 + \beta_2 x''_2 + \gamma_2 x''_3) v_2 + \\ & \quad + (a_3 x''_1 + \beta_3 x''_2 + \gamma_3 x''_3) v_3] = 0. \quad (3) \end{aligned}$$



Hogy a (2) és (3) ugyanazon pontpár egyenlete legyen, kell, hogy a két egyenletben a folyó koordináták megfelelő kifejezéseinek együtthatói egy állandó tényezőtől eltekintve egyenlők legyenek, azaz:

$$\begin{aligned}
 (a_1x'_1 + \beta_1x'_2 + \gamma_1x'_3)(a_1x''_1 + \beta_1x''_2 + \gamma_1x''_3) &= \mu x'_1x''_1 \\
 (a_2x'_1 + \beta_2x'_2 + \gamma_2x'_3)(a_2x''_1 + \beta_2x''_2 + \gamma_2x''_3) &= \mu x'_2x''_2 \\
 (a_3x'_1 + \beta_3x'_2 + \gamma_3x'_3)(a_3x''_1 + \beta_3x''_2 + \gamma_3x''_3) &= \mu x'_3x''_3 \\
 (a_1x'_1 + \beta_1x'_2 + \gamma_1x'_3)(a_2x''_1 + \beta_2x''_2 + \gamma_2x''_3) + \\
 + (a_1x''_1 + \beta_1x''_2 + \gamma_1x''_3)(a_2x'_1 + \beta_2x'_2 + \gamma_2x'_3) &= \mu (x'_1x''_2 + x''_1x'_2) \\
 (a_1x'_1 + \beta_1x'_2 + \gamma_1x'_3)(a_3x''_1 + \beta_3x''_2 + \gamma_3x''_3) + \\
 + (a_1x''_1 + \beta_1x''_2 + \gamma_1x''_3)(a_3x'_1 + \beta_3x'_2 + \gamma_3x'_3) &= \mu (x'_1x''_3 + x''_1x'_3) \\
 (a_2x'_1 + \beta_2x'_2 + \gamma_2x'_3)(a_3x''_1 + \beta_3x''_2 + \gamma_3x''_3) + \\
 + (a_2x''_1 + \beta_2x''_2 + \gamma_2x''_3)(a_3x'_1 + \beta_3x'_2 + \gamma_3x'_3) &= \mu (x'_2x''_3 + x''_2x'_3). \quad (4)
 \end{aligned}$$

Ez az egyenletrendszer szolgálhat a keresett pontok koordinátáinak meghatározására; ebben a  $\mu$  is mint ismeretlen szerepel. Ha a  $\mu$ -t paraméternek tekintjük, ez hat homogén egyenlet az  $x'_1, x'_2, x'_3, x''_1, x''_2, x''_3$  hat ismeretlenben és így a  $\mu$ -nek csakis amaz értékei mellett kapunk a triviálistól különböző és használható megoldást, a melyeknél ezek az egyenletek egymástól nem függetlenek. Hogy  $\mu$  ezen értékeit nyerjük, tekintsük ismeretleneknek az

$$\begin{aligned}
 x'_1x''_1 &= \xi_{11}, & x'_2x''_2 &= \xi_{22}, & x'_3x''_3 &= \xi_{33}, \\
 x'_1x''_2 + x''_1x'_2 &= \xi_{12}, & x'_1x''_3 + x''_1x'_3 &= \xi_{13}, & x'_2x''_3 + x''_2x'_3 &= \xi_{23}
 \end{aligned}$$

mennyiségeket. Ezek szerint rendezve a

$$\begin{aligned}
 (a_1^2 - \mu) \xi_{11} + \beta_1^2 \xi_{22} + \gamma_1^2 \xi_{33} + a_1\beta_1 \xi_{12} + a_1\gamma_1 \xi_{13} + \beta_1\gamma_1 \xi_{23} &= 0 \\
 a_2^2 \xi_{11} + (\beta_2^2 - \mu) \xi_{22} + \gamma_2^2 \xi_{33} + a_2\beta_2 \xi_{12} + a_2\gamma_2 \xi_{13} + \beta_2\gamma_2 \xi_{23} &= 0 \\
 a_3^2 \xi_{11} + \beta_3^2 \xi_{22} + (\gamma_3^2 - \mu) \xi_{33} + a_3\beta_3 \xi_{12} + a_3\gamma_3 \xi_{13} + \beta_3\gamma_3 \xi_{23} &= 0 \\
 2a_1a_2 \xi_{11} + 2\beta_1\beta_2 \xi_{22} + 2\gamma_1\gamma_2 \xi_{33} + (a_1\beta_2 + a_2\beta_1 - \mu) \xi_{12} + \\
 + (a_1\gamma_2 + a_2\gamma_1) \xi_{13} + (\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) \xi_{23} &= 0 \\
 2a_1a_3 \xi_{11} + 2\beta_1\beta_3 \xi_{22} + 2\gamma_1\gamma_3 \xi_{33} + (a_1\beta_3 + a_3\beta_1) \xi_{12} + \\
 + (a_1\gamma_3 + a_3\gamma_1 - \mu) \xi_{13} + (\beta_1\gamma_3 + \beta_3\gamma_1) \xi_{23} &= 0 \\
 2a_2a_3 \xi_{11} + 2\beta_2\beta_3 \xi_{22} + 2\gamma_2\gamma_3 \xi_{33} + (a_2\beta_3 + a_3\beta_2) \xi_{12} + \\
 + (a_2\gamma_3 + a_3\gamma_2) \xi_{13} + (\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2 - \mu) \xi_{23} &= 0
 \end{aligned}$$

homogén lineár egyenletrendszert kapjuk, melynek determinánsa azonosan egyenlő az (I) alatti karakterisztikus függvény-nyel, mert tőle csak abban különbözik, hogy a sorok az oszlopokkal fel vannak cserélve. Ennek a homogén lineár egyenletrendszernek akkor és csakis akkor van oly megoldása, a melyben nem minden ismeretlen értéke zérus, ha  $\mu$  olyan, hogy e determináns zérussal egyenlő.

Be fogjuk most bizonyítani, hogy ha az

$$x'_1, x'_2, x'_3 \quad (II)$$

$$x''_1, x''_2, x''_3 \quad (III)$$

értékrendszerek valódi megoldásai a feladatnak, azaz valóban egy pontpárt határoznak meg, úgy a  $\xi$ -k között van a zérustól különböző, kell tehát, hogy e  $x'$  és  $x''$  értékekhez oly  $\mu$  tartozzék, mely az (I) alatti egyenletnek gyöke.

Ha ugyanis a (II) és (III) alatti értékrendszerek valóban egy-egy pontot határoznak meg, akkor mindegyikökből legalább egy-egy elem a zérustól különböző. Legyenek ezek: az első értékrendszerben

$$x'_r \geq 0$$

a másodikban

$$x''_s \geq 0$$

a hol  $r$  is meg  $s$  is valamelyik az 1, 2, 3 értékek közül.

Már most két eset lehetséges:

$$1. \quad r=s.$$

Akkor világos, hogy

$$\xi_{rr} = x'_r x''_r \geq 0.$$

$$2. \quad r \neq s.$$

Akkor ismét két esetet kell megkülönböztetnünk:

a) Ha még

$$x''_r \geq 0$$

akkor megint

$$\xi_{rr} = x'_r x''_r \geq 0.$$

b) Ha ellenben

$$x''_r = 0$$



akkor

$$\xi_{rs} = x'_r x''_s + x''_r x'_s$$

erre redukálódik

$$x'_r x''_s$$

a mely a történt feltevések értelmében a zérustól különböző.

*A feladat minden megoldása tehát az (I) alatti egyenlet egy-egy gyökét szolgáltatja. Az összes megoldások a*

$$(P_i, P_k)$$

$$(i, k=1, 2, 3)$$

pontpárok és így ezeknek koordinátáit

$$x'_1 = x_1^{(i)}$$

$$x''_1 = x_1^{(k)}$$

$$x'_2 = x_2^{(i)}$$

$$x''_2 = x_2^{(k)}$$

$$x'_3 = x_3^{(i)}$$

$$x''_3 = x_3^{(k)}$$

a (4) alatti egyenletbe behelyettesítvén és az (1) alatti relációkat tekintetbe vévén kapjuk, hogy az (I) alatti karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$\mu = \lambda_i \lambda_k$$

$$(i, k=1, 2, 3)$$

a mivel a dolgozat elején kimondott tétel be van bizonyítva.

Meg kell még jegyeznünk, hogy az egész bebizonyítás folyamán avval a hallgatag feltevással éltünk, hogy az  $S$  karakterisztikus egyenletének gyökei:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

különbözők, a mit feltenni jogunk volt, mert az  $S$  együtthatói teljesen határozatlanok. Bizonyos algebrai megfontolások alapján azonban kimutatható, hogy a tétel érvényes arra az esetre is, ha a  $\lambda$ -ák részben vagy mind egyenlők.\*

\* L. RADOS Indukált lineár helyettesítések. Math. és Természettud. Értesítő. XVI. kötet 392. l.

## ÉSZREVÉTELEK «EGY ELEMI GEOMETRIAI TÉTEL» CZÍMŰ CZIKKEKHEZ.

E lapok VII. kötetének 60—63. oldalain egy cikk jelent meg, a melyben két hasonló sokszögből leszámaztatható sokszögek területi viszonya van egy tételben kifejezve. Ugyancsak e kötet 339—342. oldalain e tétel helyes volta bizonyos korlátok közé szorítottatott, azaz a cikk szerzője kimondotta, hogy a tétel abban az általánosságban, mint az az első cikkben állítottatott, nem helyes, hanem bizonyos esetben megszorító feltételeknek van alávetve.

Magam is foglalkozván e kérdéssel, arra az eredményre jutottam, hogy a tétel, bár teljes általánosságban nem áll fenn, a korlátok, melyeket a második cikkben neki szabtak, szűkebbek mint azok, melyeket a tétel valóban megtűr. Minthogy pedig a második cikkben az van állítva, hogy az illető esetben a tétel csak a korlátozott feltételek mellett «és csakis ekkor» marad igaz, azt kell mondanom, hogy a megtett javítás szintén helytelen.

E sorok megírására azonban nem a hiba kiderítése indított, mert nem sejthettem, hogy a megtett javítás után is még hiba maradhatott a tételben, hanem szándékom volt rámutatni azokra az általánosabb tételekre, melyekből ez mint különös eset következik, tehát a geometria rendszerében azt a helyet akartam kijelölni, a hová e speciális tétel helyezendő.

Tekintve, hogy sokszögek szögpontjain keresztül húzott párhuzamos sugarak használatával új sokszögek származtattak s ezeknek területei hasonlítottak össze: szükségkép az *affinitásra* kellett gondolnom, melyet már EULER állapított meg. De az affinitások különös esetét képezik a *kollinear*-idomoknak; ennél fogva úgy vélekedtem, hogy a kollinear-rendszerek tulajdonságaiból az



affin-rendszerekre és idomokra lehet majd következtetnem. Az általánosabb tételek kiderítése volt tehát szándékom és csak a munka folyamán tűntek fel a fennebb jelzett hibák. A talált eredményeket a következőkben foglaltam össze.

\*

1. Ha két sokszög egy  $O$  középpontra és egy  $o$  tengelyre vonatkozólag perspektív, akkor oly sokszög található, mely az elsővel az  $o$  tengelynek egy  $O_s$  pontjára, a másodikkal az  $o$  tengelynek egy  $O_t$  pontjára, és oly sokszög is, mely az elsővel az  $O_t$  pontra, a másodikkal pedig az  $O_s$  pontra vonatkozólag perspektív; e perspektív helyzetekhez tartozó tengelyek:  $OO_t = o_s$  és  $OO_s = o_t$ , illetve  $o_t$  és  $o_s$ .

Ha az eredeti két sokszög involúciós fekvésű, akkor ezek a le származtatott sokszögekkel együtt oly négy sokszöget képeznek, hogy közülük bármely kettő és a másik kettő az  $OO_sO_t$  háromszögnek egy szögpontjára és az avval szemben fekvő oldalra vonatkozólag involúciós fekvésű.

Jelöljük (1. ábra) a két eredeti perspektív sokszög homolog szögpontjait  $ABC \dots, A'B'C' \dots$ -vel, a tétel szerint leszámaztatott és így azokkal az  $O_s, O_t$ , illetve az  $O_t, O_s$  pontokra vonatkozólag perspektív sokszögek homolog szögpontjait  $A_1B_1C_1 \dots, A_2B_2C_2 \dots$ -vel, és legyen az  $AB, A'B', O_sO_t$  egyenesek metszéspontja  $U$ ;  $(AB, O_tO) = V, (A'B', O_tO) = V', (A_1B_1, O_tO) = V_1, (A_1B_1, O_sO_t) = U_1$ .

Minthogy

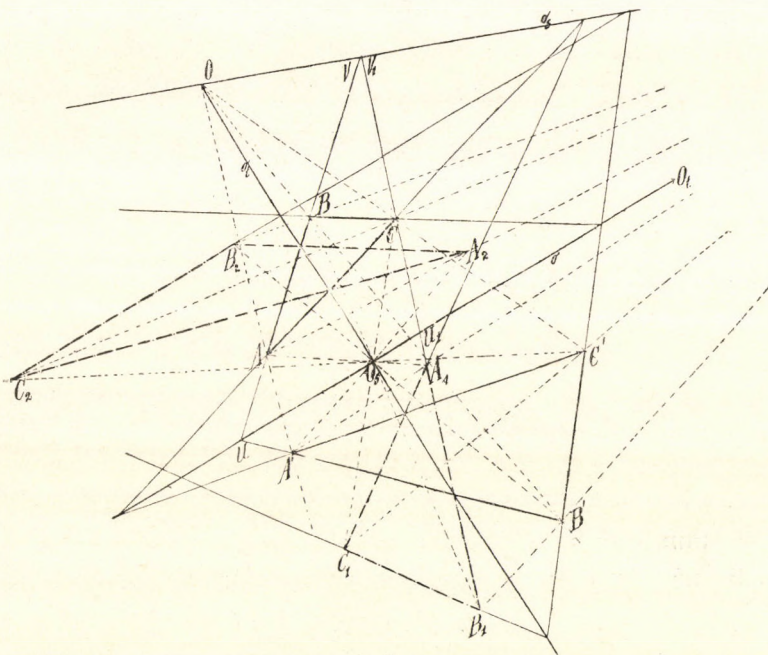
$$UABV \wedge UA'B'V' \wedge U_1A_1B_1V_1$$

(mert az 1-ső és 2-dik négyes az  $O$  pontra, a 2-dik és 3-dik négyes az  $O_t$  pontra vonatkozólag perspektív), és az  $UU_1, AA_1, BB_1$  egyenesek az  $O_s$  ponton mennek át, azért a  $V$  pont egybeesik  $V_1$ -gyel, azaz: az  $AB, A_1B_1$  egyenesek egymást az  $OO_t = o_s$  egyenesen metszik.

Hasonlókép kimutatható, hogy a  $BC, B_1C_1; \dots; A'B', A_2B_2; B'C', B_2C_2; \dots$  egyenes-párok egymást az  $o_s$ -en, az és  $A'B', A_1B_1; B'C', B_1C_1; \dots; AB, A_2B_2; BC, B_2C_2; \dots$  egyenes-párok egymást

az  $o_s$  egyenesen metszik, vagyis hogy a tételben jelzett sokszögek az illető tengelyekre vonatkozólag perspektívek.

Ha az  $ABC \dots, A'B'C' \dots$  sokszögek az  $O$  pontra és az  $o$  tengelyre vonatkozólag involucziós fekvésűek vagyis homolog oldalai és szögpontjai az  $O$  és  $o$ -tól harmonikusan vannak elválasztva, akkor az  $AA_1O_s, A'A_2O_s; AA_2O_t; A'A_1O_t$  egyenes-párok, tehát az  $A_1A_2$  pontpár és hasonlóképp a  $B_1B_2, C_1C_2$  pontpárok is az  $O$



1. ábra.

és  $o$ -tól harmonikusan vannak elválasztva. Minthogy végre az  $AA_1A_2A'$  négyszögnek átlóháromszöge  $OO_sO_t$ , azért annak bármily két szögpontja az  $OO_sO_t$  háromszög egy szögpontjától és az avval szemben fekvő oldaltól harmonikusan lesznek elválasztva, mi a tétel második részének helyességét igazolja.

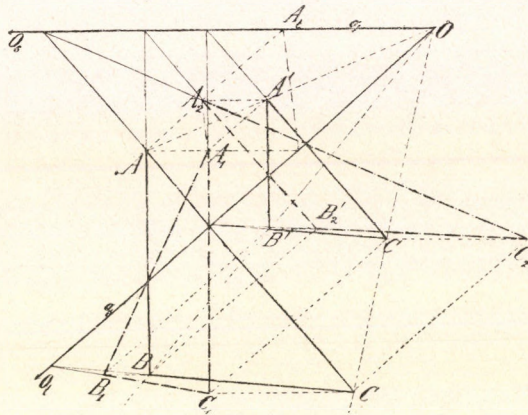
2. Tegyük fel, hogy az előbbi konfigurációban az  $o$  egyenes és így az  $O_s, O_t$  pontok végtelen távol vannak (2. ábra). Az  $ABC \dots A'B'C' \dots$  sokszögek ekkor hasonlóak, vagy, mint STEINER szerint,



mondani szokás, perspektív fekvésűek, az  $A_1B_1C_1 \dots, A_2B_2C_2 \dots$  sokszögek pedig amazokkal affín fekvésűek, és az  $o_t, o_s$  affinitási tengelyek egymást az  $O$  pontban metszik. Ha az  $AA_1$  és  $AA_2$  egyenések metszéspontja az  $o_s$ , illetve az  $o_t$ -vel  $A_s, A_t$ , és a sokszögek területeit akkép jelöljük, hogy szögpontjait zárójelbe helyezzük, akkor az affín-idomoknak ismert tulajdonsága folytán

$$(ABC \dots) : (A_1B_1C_1 \dots) = AA_s : A_1A_s$$

$$(ABC \dots) : (A_2B_2C_2 \dots) = AA_t : A_2A_t$$



2. ábra.

De minthogy az  $AA_1A'A_2$ ,  $AA_sOA_t$  paralelogrammák az  $A$  pontra nézve perspektív fekvésűek, azért  $A_1A_2 \parallel A_sA_t$ , tehát

$$AA_s : A_1A_s = AA_t : A_2A_t,$$

a miből az előbbi aránylatokra tekintve következik :

$$(A_1B_1C_1 \dots) = (A_2B_2C_2).$$

Ennélfogva :

*Ha valamely sokszög szögpontjain keresztül egy  $o_s$  és egy  $o_t$  sugárral párhuzamos sugarakat húzunk és ezeket a sokszöghöz hasonló fekvésű sokszögnek szögpontjain keresztül menő és az  $o_t$ , illetve az  $o_s$  sugárral párhuzamos sugarakkal metszük, akkor a homolog szögpontokon keresztülmenő sugarak metszéspontjai két egyenlő területű sokszöghöz szögpontjai.*

Ez a bevezetésben jelzett második czikknek helyes tétele, melyet még 1. alapján a következővel egészíthetjük ki:

*Ha az eredeti két sokszög cenztrikusan szimmetrikus, vagy kongruens és hasonló fekvésű, akkor a leszármaztatott két sokszög is ugyanarra a középpontra vonatkozólag szimmetrikus, illetve kongruens.*

3. A továbbiakra vonatkozólag kiindulunk a következő általános tételből:

«Két ugyanegy síkban fekvő  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  kollinear pontrendszer síkjában mindig van oly háromszög  $OPQ$ , a melynek szögpontjai megfelelő pontok és így oldalai is megfelelő egyenesek; e háromszögnek egyik szögpontja és avval szemben fekvő oldal mindig valós a többi két szögpont és oldal képzetes is lehet.» \*

Az  $OPQ$  háromszög pedig következőkép szerkeszthető: A sík egy tetszőleges  $G(L')$  pontjának és az azon átmenő  $g(l')$  egyenesnek, mint a  $\Sigma$  és  $\Sigma'$  rendszerhez tartozónak egy  $G'$  és  $L$  pont és egy  $g'$  és  $l$  egyenes felel meg  $\Sigma'$ ,  $\Sigma$  rendszerekben. Ha a  $g(l')$  egyenes a  $G(L')$  pont körül forog, akkor ezzel a  $g'$  és  $l$  projektíve változik a  $G'$  és  $L$  pont körül, és így a megfelelő  $gg'$  és  $ll'$  egyenesek egymást egy  $k_g$ , illetve egy  $k_l$  kúpszeleten metszik. E két kúpszelet a  $G(L')$  ponton megy keresztül, tehát egymást még három pontban metszi, mely származásánál fogva az  $OPQ$  háromszögnek szög-pontja.

Az  $OPQ$  háromszögnek egyik tulajdonsága, hogy minden szög-pontjában végtelen sok megfelelő egyenes-pár találkozik és minden oldalán végtelen sok megfelelő pont-pár fekszik; ellenben a sík egy tetszés szerinti pontján csak *egy* megfelelő egyenes-pár metszi egymást, t. i. mely a felvett  $G(L')$  pontot az egyes rendszerekben annak megfelelő  $G'$ ,  $L$  pontokkal összeköti, és minden egyenes  $g(l')$  csak egy megfelelő pont-párt tart, t. i. melyben a felvett  $g(l')$  egyenest a megfelelő  $g'$ ,  $l$  egyenesek metszik. A  $G(L')$  ponton átmenő minden egyenesnek második metszéspontjai az előbbi  $k_g$ ,  $k_l$  kúpszeletekkel, ezen az egyenesen fekvő megfelelő pontok.

\* KLUG: *Projectiv geometria*, 237. l.



Ennélfogva ha az  $OPQ$  háromszög  $PQ = o$  oldalán egy tetszőleges  $O_s$  pontot veszünk fel és ezen keresztül sugarakat fektetünk, úgy ezek mindegyikén a  $\Sigma, \Sigma'$  kollineár rendszereknek egy-egy megfelelő pontja  $T, T'$  van. E  $T$  pontok egy az  $O$  ponton átmenő  $OT = t$  egyenesen, és a nekik megfelelő  $T'$  pontok egy  $OT' = t'$  egyenesen fekszenek, mert a  $t, t'$  egyenesek az  $o$ -t a  $T_o, T'_o$  megfelelő pontokban metszik, melyeknek összekötő egyenese  $o$  szintén az  $O_s$  ponton megy át, úgy hogy a  $\Sigma$  rendszer  $t$  egyenesén fekvő pontsor, a  $\Sigma'$  rendszer  $t'$  egyenesén fekvő és neki megfelelő pontsorral az  $O_s$  pontra vonatkozólag perspektív.

Ha az  $O_s$  pont az  $o$  egyenesen tovamozog, pl. a mozgó  $O_s$  úgy tekintetik, mint a  $G(L')$  középpontú sugársor  $g(l')$  sugarainak metszéspontja az  $o$  egyenessel, akkor a  $t$  és a  $t'$  sugár az  $O$  pont körül az  $O_s$ -től leírt pontsorral projektív sugársort ír le, mert az  $O_s$  pontsor az előbbi  $k_g, k_l$  kúpszeleteken változó  $(gg'), (ll')$  pontoknak projekciója a  $G(L')$  pontból az  $o$ -ra, míg a  $t, t'$  sugarak sorai ugyane  $(gg'), (ll')$  pontokat projicziálják a  $k_g, k_l$  kúpszeletek közös  $O$  pontjából.

Ha az  $O$  ponton átmenő  $s, s'$  egyenesek a  $\Sigma, \Sigma'$  rendszerben szintén megfelelők, tehát megfelelő pontjaik sora az  $o$  egyenes egy  $O_t$  pontjára nézve perspektívek, és az  $s, s'$  egyenesek az  $o$ -t az  $S_o, S'_o$  pontokban metszik, akkor

$$PQT_oS_o \frown PQT'_oS'_o \frown PQO_sO_t,$$

a miből következik:

$$PQT_oT'_oO_s \frown PQS_oS'_oO_t;$$

vagy ha

$$OQ = p, OP = q, OO_t = o_s, OO_s = o_t,$$

akkor

$$pqt't'o_t \frown pqss'o_s.$$

Ha a  $\Sigma, \Sigma'$  rendszerekben az  $O_s, O_t$  pontok megfelelők, tehát

$$PQO_sT_o \frown PQO_tT'_o,$$

akkor, tekintve az előbbi

$$PQO_sT_o \frown PQO_tS_o$$

projektivitást, látható, hogy a  $T'_o$  pont  $S_o$ -val, tehát  $t'$  az  $s$ -sel összeesik.

Ha pedig a  $\Sigma, \Sigma'$  rendszerek oly helyzetűek, hogy az  $O$  pontból kisugárzó megfelelő sugarak, és így az  $o$  egyenesen fekvő megfelelő pontok involucziót alkotnak, és az  $O_s, O_t$  pontokat akkép választjuk az  $o$  egyenesen, hogy ezek a pontinvoluczióknak, tehát az  $o_t, o_s$  sugarak a sugárinvoluczióknak társелеmei, azaz a

$$pp \cdot qq \cdot o_s o_t \cdot ss' \cdot tt'$$

sugárpárok involuczióban vannak, akkor az  $s, s'$  sugarak a  $t', t$  sugarakkal egyesülnek.

Ugyanis ebben az esetben

$$pqo_s o_t \nabla pqo_t o_s;$$

tehát az előbbi

$$pqss' o_s o_t \nabla pqtt' o_t o_s$$

folytán a

$$pp \cdot qq \cdot st \cdot s't' \cdot o_s o_t$$

sugárpárok is involucziót alkotnak. De a két involucziót tekintve, tüstént látható, hogy az  $s$  a  $t'$  sugárban, a  $t$  pedig az  $s'$  sugárban fekszik.

4. Ezeket előrebocsátva, legyen a  $\Sigma, \Sigma'$  kollinear rendszerek közös síkjában az  $o$  egyenes, valamint az  $O$  pont megfelelő.

Vegyünk fel az  $o$  egyenes egy  $O_s$  pontján keresztül húzott  $m'$  egyenesen két pontot,  $A', A_1$ -et, és nevezzük ezen egyenesen fekvő megfelelő pontpárt  $T, T'$ -nek, az  $A'A_1 TT'$  pontoknak projekcióit az  $O$  pontból az  $o$  egyenesre  $A'_0 A_{10} T'_0 T_0$ -nak. Tekintsük az  $A'A'_0 T'_0 T_0, A_1 A_{10} TT_0$  négyszögek szögpontjait két kollinear rendszer  $\Sigma', \Sigma_1$  megfelelő pontjainak, a melyek e rendszereket meghatározzák.

A  $\Sigma', \Sigma_1$  rendszerekben, mint könnyen látható, az  $O$  pont és az  $O_s$  pont, valamint az  $m', o, OO_s = o_t$  egyenesek megfelelők; ennél fogva a  $\Sigma', \Sigma_1$  rendszerek az  $O_s$  pontra, és egy az  $O$  ponton keresztül menő  $s'$  tengelyre vonatkozólag perspektívek.

Az  $\Sigma_1$  rendszer azonban még  $\Sigma'$ -sel kollinear  $\Sigma'$  rendszerrel is perspektív, az  $O$ -n keresztül menő  $t = OT$  tengelyre és egy az  $o$  egyenesen fekvő  $O_t$  középpontra vonatkozólag. Mert ha a  $\Sigma'$  rend-



szer  $A'$  pontjának  $\Sigma$ -ban az  $A$  felel meg, és  $A$ -nak projekciója az  $O$ -ból az  $o$ -ra  $A_0$ , akkor a  $\Sigma'$  rendszer  $ATA_0T_0O$  pontjainak  $\Sigma_1$ -ben az  $A_1TA_{10}T_0O$  pontok felelnek meg, melyek közül  $OTT_0$  a  $t$  egyenesen fekszik.  $l$  képezi tehát a tengelyt és az  $AA_1$ ,  $o$  egyenesek  $O_t$  metszéspontja a középpontot, a melyre nézve  $\Sigma$ ,  $\Sigma_1$  perspektív.

Ez az  $O_t$  pont pedig az  $s'$  egyenessel abban a vonatkozásban áll, hogy pontjai mint  $\Sigma'$ -hez tartozó pontok, az  $O_t$ -ből a  $\Sigma'$  rendszerben azoknak megfelelő, tehát egy az  $O$  ponton átmenő  $s$  egyenes pontjaiba projekciáltatnak. Ugyanis az  $s'$  egyenes egy  $X_1$  pontjának mint a  $\Sigma_1$ -hez tartozónak oly  $X$  pont felel meg  $\Sigma$ -ban, mely az  $X_1$  és az  $O_t$  ponttal egy egyenesen fekszik; de  $X_1$  mint az  $s'$ -nek pontja összeesik a  $\Sigma'$  rendszerben neki megfelelő  $X'$  ponttal; tehát az  $X'$ ,  $X$  pontok a  $\Sigma'$ ,  $\Sigma$  rendszerekben megfelelő pontok, melyek az  $O_t$ -vel egy egyenesben fekszenek.

Az  $A_1$  pontot az  $A'O_s = m'$  egyenesen tetszőlegesen vettük fel és így az  $AA_1$  egyenes metszéspontja az  $o$ -val, vagyis  $O_t$ , az  $o$  egyenes tetszőleges pontjának tekinthető.

Feltéve, hogy az  $O_t$ ,  $O_s$  pontok a  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  rendszerekben megfelelők, minthogy ebben az esetben az  $A'O_s = m'$  és az  $AO_t = m$  egyenesek a  $\Sigma'$ ,  $\Sigma$  rendszerekben is megfelelők, tehát azoknak  $A_1$  metszőpontja úgy az  $O_s$  ponthoz tartozó  $t$  egyenesen, mint az  $O_t$  ponthoz tartozó  $s'$  egyenesen fekszik: ez az  $A_1$  pont az egyesült  $t$   $s'$  egyeneseknek pontja lesz. Ebben az esetben tehát a  $\Sigma_1$  rendszernél elfajulás áll elő, a mennyiben a  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  rendszerek összes pontjainak a  $\Sigma_1$ -ben, a  $t(s')$  egyenes pontjai felelnek meg.

Ennélfogva:

*Ha a  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  kollineár rendszerek  $O$  pontjában két megfelelő pont,  $o$  egyenesében pedig két megfelelő egyenes van, és mi az  $o$  egyenes egy tetszés szerinti  $O_t$  pontjából  $\Sigma$  pontjaihoz, és  $o$ -nak egy másik  $O_s$  pontjából a  $\Sigma'$  rendszer pontjaihoz sugarakat húzunk, akkor a megfelelő pontokhoz húzott sugarak metszéspontjai, egy a  $\Sigma$ -val az  $O_t$  középpontra, a  $\Sigma'$ -sel pedig az  $O_s$  középpontra vonatkozólag perspektív  $\Sigma_1$  rendszernek pontjai.*

*A  $\Sigma$ ,  $\Sigma_1$ -hez tartozó tengely a  $\Sigma$  rendszernek az a  $t$  egyenese, melynek pontjai az  $O_s$  pontból a  $\Sigma'$  rendszerben neki megfelelő  $t'$*



egyenes pontjaiba projicziáltatnak, és a  $\Sigma'$ ,  $\Sigma_1$ -hez tartozó tengely a  $\Sigma'$  rendszernek az az  $s'$  egyenese, melynek pontjai az  $O_t$  pontból a  $\Sigma$  rendszerben neki megfelelő  $s$  egyenes pontjaiba projicziáltatnak.

Ha a  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  rendszerekben az  $O$  ponton keresztülmenő összeeső megfelelő egyenesek  $p$  és  $q$ , továbbá  $OO_s = o_t$ ,  $OO_t = o_s$ , akkor

$$pqt't'o_t \nabla pqss'o_s.$$

Ha az  $O_t$ ,  $O_s$  pontok a  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  rendszerek megfelelő pontjai, akkor az  $s$  tengely a  $t'$ -sel egyesül és a  $\Sigma_1$  rendszer összes pontjai a  $t(s')$  egyenesben fekszenek.

E tételtől következik, hogy ha az  $O_s$  pontból a  $\Sigma$  rendszer pontjaihoz, az  $O_t$ -ből pedig a  $\Sigma'$  rendszer pontjaihoz sugarakat huzunk, akkor a megfelelő pontokhoz húzott sugarak egymást egy  $\Sigma_2$  rendszer pontjaiban metszik, mely  $\Sigma'$ -val az  $O_s$  középpontra és az  $s$  tengelyre,  $\Sigma'$ -sel pedig az  $O_t$  középpontra és a  $t'$  tengelyre vonatkozólag perspektív.

Ezek szerint az 1. alatt levő tételt ekkép általánosíthatjuk;

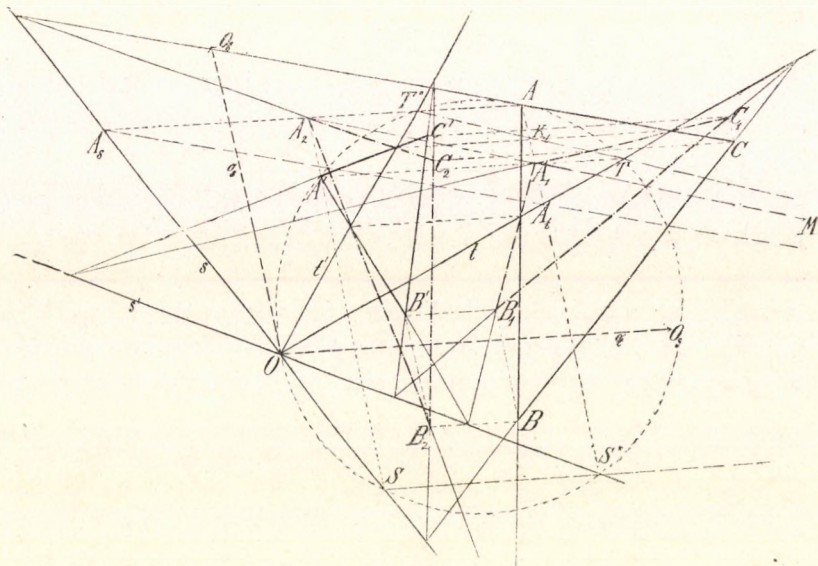
Ha  $\Sigma = ABC \dots$ ,  $\Sigma' = A'B'C' \dots$  ugyanegy síkban fekvő, de nem perspektív helyzetű kollineár sokszögek, akkor e síkban van oly  $o$  egyenes, mely megfelelő egyenesével összeesik. Ha az  $o$  egyenes tetszőleges  $O_t$ ,  $O_s$  pontjaiból az  $ABC \dots$  sokszög szögpontjaihoz sugarakat huzunk, és ezeket az  $O_s$ , illetve az  $O_t$  pontból az  $A'B'C' \dots$  sokszög megfelelő szögpontjaihoz húzott sugarakkal metsszük, akkor a metszőpontok egy  $\Sigma_1 = A_1B_1C_1 \dots$  illetve egy  $\Sigma_2 = A_2B_2C_2 \dots$  sokszögnek szögpontjai.

A  $\Sigma$ ,  $\Sigma_1$  és a  $\Sigma$ ,  $\Sigma_2$  sokszögek az  $O_t$  és az  $O_s$  középpontra és a  $t$ ,  $s$  tengelyekre vonatkozólag, a  $\Sigma'$ ,  $\Sigma_1$  és a  $\Sigma'$ ,  $\Sigma_2$  sokszögek az  $O_s$  és az  $O_t$  középpontra és az  $s'$ ,  $t'$  tengelyekre vonatkozólag perspektívek. Ezek az  $s$ ,  $s'$ ;  $t$ ,  $t'$  tengelyek pedig a  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  kollineár sokszögek síkjában megfelelő egyenesek, melyek egymást az összeeső megfelelő  $O$  pontban metszik, és az  $s$ ,  $s'$ ;  $t$ ,  $t'$  egyeneseknek megfelelő pontjai az  $O_t$ , illetve az  $O_s$  pontból egymásba projicziáltatnak.

Ha a  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  sokszögek oly helyzetűek, hogy az  $o$  egyenesen egy,



tehát végtelen sok oly pont van, melyet akár az első, akár a másik sokszög szögpontjának tekintünk, ugyanegy szögpont felel meg neki a másik sokszögben, és az  $O_s$ ,  $O_t$  pontok ily társponatok, akkor a  $\Sigma_1$  sokszögnek összes szögpontjai az egyesült  $ts'$  egyenesben, és a  $\Sigma_2$  sokszögnek összes szögpontjai az egyesült  $st'$  egyenesben fekszenek.



3. ábra.

A midőn a sokszögek perspektivék, az  $s$ ,  $s'$  és a  $t$ ,  $t'$  tengelyek az  $OO_t = o_s$  és az  $OO_s = o_t$  egyenesben egyesülnek, úgy hogy ez a tétel az 1. alatt levőknek első részét is magában foglalja.

5. Áttérünk most arra az esetre, melynél a  $\Sigma = ABC \dots$ ,  $\Sigma' = A'B'C' \dots$  sokszögek, vagy általánosabban kifejezve, a  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  rendszerek hasonlóak.

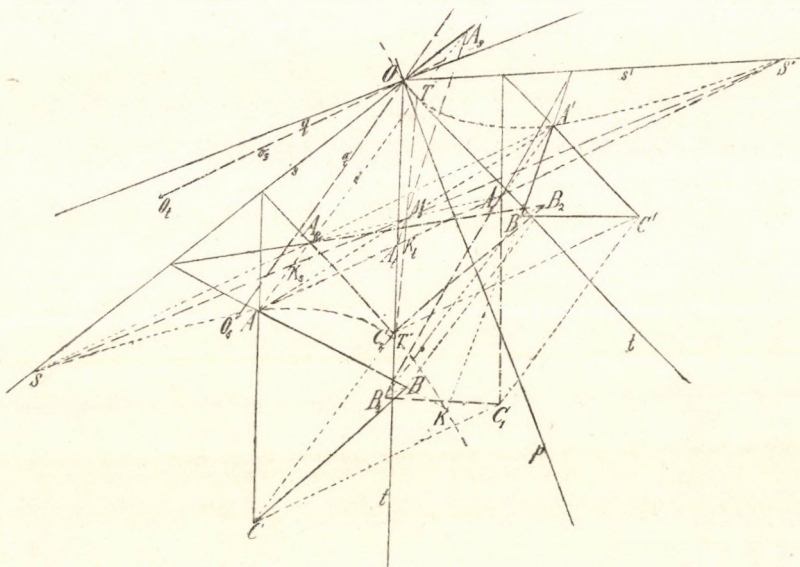
Ekkor az összeeső megfelelő  $o$  egyenes a sík végtelen távol fekvő egyenese, az összeeső megfelelő  $O$  pont pedig végesben van. De ugyanegy síkban fekvő hasonló sokszögek kétfélek lehetnek:

1. olyanok, hogy az egyik sokszöget a sík egy ( $O$ ) pontja körül forgatva a síkban, a másikkal hasonló fekvésű helyzetbe hozhatjuk, azaz a sokszögek *ugyanegy értelműek* (3. ábra);



2. olyanok, hogy a forgatandó sokszögnek előbb síkját át kellene fordítani és csak ezután lehet a közös síknak egy pontja körül forgatva a síkban a másikkal hasonló fekvésbe hozni, azaz a sokszögek *ellenkező értelműek* (4. ábra).

E 2. esetben a síkban oly két egymásra merőleges egyenes  $p, q$  található, hogy az egyik, de bármelyik sokszögnek tükörképe a  $p$  vagy a  $q$  egyenesre vonatkozólag a másik sokszöggel a  $(pq) = O$



4. ábra.

pontra vonatkozólag hasonló fekvésű. E két egyenes a  $\Sigma, \Sigma'$  rendszerben összeeső megfelelő, és mindig párhuzamos a sokszögek két tetszőleges megfelelő oldalától képezett szögek felezőivel.

Ellenkező értelmű hasonló sokszögek síkjában tehát van egy  $opq = OPQ$  háromszög, a melynek oldalai és így  $(pq) = O, (qo) = P, (po) = Q$  szögpontjai megfelelők; az  $o$  oldal végtelen távol van, a  $p, q$  egyenesek pedig egymásra merőlegesek és egymást a végesben fekvő  $O$  pontban metszik.

A  $\Sigma, \Sigma'$  rendszerek azon kívül, hogy az  $OPQ$  háromszög különös alakú, még annyiban speciális, hogy a megfelelő pontok a



$p, q$  egyenesektől és így a megfelelő egyenesek a  $P, Q$  pontoktól harmonikusan vannak elválasztva, úgy hogy a megfelelő pontokat az  $O$  pontból projecziálva, tehát megfelelő sugarak, és a megfelelő egyeneseknek végtelen távol fekvő pontjai egyenoldalúan hiperbolás involúciós sorokat alkotnak.

Ha az  $AA', BB'$  pontpárok a rendszerek megfelelő pontjai, a  $K$  pont pedig az  $AB, A'B'$  megfelelő egyenesek metszőpontja, akkor az  $AA'K, BB'K$  pontokon keresztül menő egyenoldalú hiperbolák, melyeknek asimptotái az  $(AB, A'B')$  szögfelezőivel párhuzamosak, egymást a  $K$  ponton kívül még az  $OPQ$  háromszög szögpontjaiban metszik. E szögpontok közül azonban a  $P$  és a  $Q$  mint a hiperbolák végtelen távol fekvő pontja ismeretes, tehát az  $O$  pont vonalosan szerkeszthető.

Visszatérve az ugyanegy értelmű hasonló sokszögekhez a síkban, ha az  $AA', BB'$  pontpárok pontjai megfelelők és  $K = (AB, A'B')$ , akkor a  $KAA', KBB'$  pontokon keresztül menő köröknek második valós metszéspontja  $O$  az egyedüli valós pont, mely összeső megfelelő, mert  $OAB \sim OA'B'$ .

A két körnek még végtelen távol van két kapcsolt képzetes közös pontja  $P, Q$ , t. i. a síknak képzetes körpontjai; e  $P, Q$  pontok adják a rendszereknek többi egybeeső megfelelő pontjait.

Ebben az esetben tehát a  $\Sigma, \Sigma'$  hasonló rendszereknél ama  $OPQ$  háromszögnek, melynek szögpontjai és oldalai megfelelők, csak az  $O$  szögpont és a  $PQ = o$  végtelen távol fekvő oldal valós, a másik két szögpont a két képzetes körpont, a másik két oldal  $p, q$  pedig az  $O$  pontból kisugárzó czirkuláris involúciós sugársornak két képzetes kettőssugara.

*Az ugyanegy értelmű hasonló sokszögek tehát nem annyira speciális helyzetűek, mint az ellenkező értelműek, a mennyiben azoknál általában a végtelen távol fekvő egyenesen nincsenek egymásnak felcserélhetően megfelelő pontok, hanem csak akkor, ha megfelelő oldalai egymásra merőlegesek. Az ellenkező értelmű hasonló sokszögeknél a jelenség mindig bekövetkezik.*

6. A 4. pont végén talált tétel hasonló sokszögekre alkalmazva így szól:



Ha valamely sokszögnek szögpontjain keresztül egy  $o_s$  és egy  $o_t$  sugárral párhuzamosakat húzunk és ezeket egy a sokszöghez hasonló sokszög szögpontjain keresztülmenő és az  $o_t$ , illetve az  $o_s$ -sel párhuzamos sugarakkal metszük, akkor a megfelelő szögpontokon keresztülmenő sugarak metszéspontjai, két a felvett sokszögekkel affín sokszögnek szögpontjai lesznek. Az affinitás tengelyei  $t$ ,  $s$  és  $s'$ ,  $t'$ , melyet  $e$  két sokszög az első, illetve a második sokszöggel meghatároz, egyenlő szögeket alkotnak; e szögek ellenkező vagy ugyanegy értelemben fekszenek a szerint, a mint sokszögek ugyanegy vagy ellenkező értelműek.

Ha az  $o_s$  egyenesnek, mint az első, vagy a második, avagy akár az első, akár a második sokszöghez tartozónak, a másik sokszögben egy az  $o_t$ -vel párhuzamos egyenes felel meg, akkor a leszármaztatott sokszögek közül vagy az egyiknek, vagy a másiknak, vagy mindkettőnek szögpontjai az egyenesen fekszenek.

7. Hasonlítsuk most össze az  $ABC \dots; A'B'C' \dots$  sokszögekből az előbbi tétel alapján leszármaztatott  $A_1B_1C_1 \dots, A_2B_2C_2 \dots$  sokszögek területeit. Jelöljük e végből az  $AA_2$  és  $s$  metszéspontját  $A_s$ -sel, az  $AA_1$  és  $t$  metszéspontját  $A_t$ -vel.

A talált affinitás folytán

$$(ABC \dots) : (A_1B_1C_1 \dots) = AA_t : A_1A_t$$

$$(ABC \dots) : (A_2B_2C_2 \dots) = AA_s : A_2A_s.$$

Ennélfogva  $(A_1B_1C_1 \dots)$  akkor lesz egyenlő  $(A_2B_2C_2 \dots)$ , ha

$$AA_t : A_1A_t = AA_s : A_2A_s \quad (\alpha)$$

Ez az  $(\alpha)$  proporció pedig két esetben következhetik be:

1. ha  $A_sA_t \parallel A_1A_2$ ,

2. ha az  $A_sA_t$  egyenes az  $A_1A_2$  vonal darab felezőpontján, vagy a mi ugyanazt mondja, ha  $A_sA_t$  az  $AA_1A_2$  parallelogramma átlójának metszéspontján megy keresztül.

Az 1. esetről ez közvetlenül belátható; a 2.-nél pedig az  $A_1$  ponton át az  $A_sA_t$ -vel párhuzamos egyenest kell húznunk, mely  $s$ -et az  $A$ -ban metszi. Ekkor

$$A_2A_s = A_sA$$



és

$$AA_t : A_1A_t = AA_s : \overline{AA_s},$$

tehát a fennebbi (a) proporeció szintén ki lesz elégítve.

8. *Vizsgáljuk meg először az (a) proporecióra tekintve az ugyanegy értelmű hasonló sokszögeket.*

Fektessünk e végből az  $AA'O$  ponton keresztül egy kört és jelöljük ennek második metszéspontját az  $OA_s = s$ ,  $OA_t = t$ ,  $AA_s$ ,  $AA_t$  egyenesekkel  $S$ ,  $T$ ,  $T^*S^*$ -sel, és legyen még  $(AA_s, SS^*) = K_s$ ,  $(AA_t, TT^*) = K_t$ .

A körön fekvő  $AOA'S^*T^*$  pontok projekciói az  $S$  pontból az  $AA_s$  egyenesre és a  $T$  pontból az  $AA_t$  egyenesre, t. i.

$AA_sA_2K_sT^* \cap AA_tA_1S^*K_t$  perspektív helyzetűek; ennél fogva az  $A_sA_t$ ,  $A_2A_1$ ,  $SS^*$ ,  $TT^*$  egyenesek egymást ugyanegy  $M$  pontban metszik.

Az (a) aránylat tehát ki lesz elégítve, ha ez az  $M$  pont vagy végtelen távol van, vagy pedig az  $AA'$ ,  $A_1A_2$  vonaldarabok felezőpontja.

Minthogy

$$\sphericalangle SOT = (st) = \sphericalangle (o_s o_t) = \sphericalangle S^*AT^*,$$

azért

$$\sphericalangle SOS^* = \sphericalangle TAT^*.$$

Ha tehát az  $M$  pont végtelen távol van, azaz  $SS^* \parallel TT^*$ , akkor az  $ST$ ,  $S^*T^*$  egyenesek egymást a kör középpontjában metszik,  $\sphericalangle S^*AT^*$  derékszög, és így

$$o_s \perp o_t.$$

Ha pedig az  $M$  pont az  $AA'$  vonaldarab felezőpontja, tehát a  $TT^*$ ,  $SS^*$  egyenesek a körnek átmérői, akkor  $\sphericalangle AOA'$  derékszög, azaz az egyik sokszögnek oldalai merőlegesek a másik sokszögnek megfelelő oldalaira.

*Vizsgáljuk meg másodszor az ellenkező értelmű hasonló sokszögeket.*

Fektessünk e végből az  $OAA'$  pontokon át egy egyenoldalú hiperbolát, melynek asimptotái a többször használt  $p$ ,  $q$  egyenesekkel párhuzamosak, s melynek középpontja, mert az  $AOA'$  szög szárai



a  $p, q$  egyenesekhez egyenlő szögek alatt hajlanak, az  $AA'$  vonal-  
darab felezőpontja.

Jelöljük ismét az

$$OA_s = s, OA_t = t, AA_s, AA_t.$$

egyeneseknek második metszéspontját evvel a hiperbolával,  $S, T, T^*, S^*$ -sel, és legyen még  $(AA_s, SS^*) = K_s, (AA_t, TT^*) = K_t$ .

Minthogy  $A'S$  párhuzamos  $AA_tS^*$ -sel, (mert az  $A'S, AS$  egyenesek a hiperbola asymptotáival egyenlő szöget alkotnak és így az  $S$ -nek, mint  $\Sigma$ -hoz tartozó pontnak megfelelő pontja  $S'$  a  $\Sigma'$ -ben is az  $A'S$ -en fekszik, tehát  $A'S \parallel o_s \parallel AA_tS^*$ ), azért az  $SS^*$  egyenes, és hasonló úton kimutatva a  $TT^*$  egyenes az egyenoldalú hiperbola átmérői. De a hiperbolán fekvő  $AOA'S^*T^*$  pontoknak projekciói az  $S$  pontból az  $AA_s$  egyenesre és a  $T$  pontból az  $AA$  egyenesre, t. i. az

$$AA_sA_2K_sT^* \cap A_tA_1AS^*K_t$$

perspektív helyzetűek, és így az  $A_sA_t, A_2A_1, SS^*, TT^*$  egyenesek egymást a hiperbola  $M$  középpontjában metszik.

Az  $A_sA_t$  egyenes tehát mindig átmegy az  $A_1A_2$  vonal-  
darab felezőpontján, azaz ebben az esetben az (a) proporció mindig ki lesz elégítve.

9. Ezek után a következő tételben egybefoglalhatjuk az «egy elemi geometriai tétel» című czikkekre vonatkozó észrevételeinket:

*Ha valamely sokszög szögpontjain keresztül síkjának egy  $o_s$  és egy  $o_t$  sugarával párhuzamosakat húzunk és ezeket egy a sokszöghöz hasonló, vele ugyanabban a síkban fekvő sokszög szögpontjain keresztül menő és az  $o_t$ , illetve az  $o_s$  sugárral párhuzamos sugarakkal metszszük, akkor a megfelelő szögpontokon keresztül menő sugarak metszéspontjai két új sokszögnek szögpontjai lesznek. Ez új sokszögek területei egyenlők:*

1. ha az eredeti két sokszög hasonló fekvésű;
2. ha a sokszögek ellenkező értelműek;
3. ha a sokszögek megfelelő oldalai egymásra merőlegesek, végre még a lehető eset, melynek a 3. különös esete
4. ha a sokszögek ugyanegy értelműek és  $o_s \perp o_t$ .



*Ha az  $o_s$  egyenesnek, mint az első vagy a második, avagy akár az első, akár a második sokszöghez tartozónak, a másik sokszögben egy az  $o_t$ -vel párhuzamos egyenes felel meg, akkor az új sokszögek egyikének, vagy másikának, vagy mindkettőnek területe  $= 0$ .*

Az idézett cikkek elsejében minden megszorítás nélkül volt kifejezve a leszármaztatott sokszögek területeinek egyenlősége. A második cikkben pedig túlságosan voltak korlátozva a feltételek, melynél ama sokszögek területei egyenlők, a mennyiben a 2. és 3. eset figyelmen kívül maradt, azaz ez is az  $o_s \perp o_t$  feltételhez kötött.

10. A midőn az  $ABC \dots, A'B'C' \dots$  sokszögek hasonló fekvésűek, a 2. tétel alapján tőlük leszármaztatott  $A_1B_1C_1 \dots, A_2B_2C_2 \dots$  sokszögek területei függetlenek az  $o_s, o_t$  sugarak irányától.

Ugyanis ha  $(A_1A, o_t) = A_t, (A_1A', o_s) = A'_s$ , akkor

$$\begin{aligned}(ABC \dots) : (A_1B_1C_1 \dots) &= AA_t : A_1A_t = AO : A'O \\ (A'B'C' \dots) : (A_1B_1C_1 \dots) &= A'A'_s : A_1A'_t = A'O : AO,\end{aligned}$$

mely proporcziók egymással szorozva, az

$$(A_1B_1C_1 \dots)^2 = (ABC \dots) (A'B'C' \dots)$$

egyenlethez vezetnek. E szerint:

*Ha valamely sokszögnek szögpontjain keresztül egy tetszés szerinti sugárhoz és egy hozzá hasonló fekvésű sokszög szögpontjain keresztül egy másik sugárhoz párhuzamos sugarakat vonunk, akkor a megfelelő szögpontokon átmenő sugarak egymást egy új sokszög szögpontjaiban metszik. E sokszög területének négyzete egyenlő a két hasonló fekvésű sokszög területének szorzatával.*

E tétel még következőképen általánosítható:

Az  $ABC \dots, A'B'C' \dots$  hasonló sokszögekről feltételezzük, hogy ugyanegy értelműek, tehát megfelelő oldalaik egymással egyenlő szöget,  $\varphi$ -t alkotnak. E sokszögekről kimutattuk, hogy ha az elsőnek szögpontjain keresztül az  $o_s, o_t$  sugarakkal párhuzamosakat húzunk és ezeket a második sokszögnek megfelelő szögpont-

jain keresztül menő és az  $o_t$ , illetve az  $o_s$ -sel párhuzamos sugarakkal metszük, akkor a metszéspontok oly  $A_1B_1C_1 \dots, A_2B_2C_2 \dots$  sokszögeknek szögpontjai, melyeknek területei, ha  $o_s \perp o_t$ , egyenlők.

De bebizonyítható, hogy e területek még az  $o_s$  sugár irányától is függetlenek.

Ugyanis, ha mint előbb (7):  $(A_1A, t) = A_t$   $(A_2A, s) = A_s$ , és  $(A_1A', t') = A'_t$ ,  $(A_1A', s) = A'_s$ , akkor az  $AA_1A'A_2$ ,  $AA_tOA_s$ ,  $A'A_tOA'_s$  pontok egy-egy körön fekszenek, melyek közül az első a két utóbbit az  $A$ , illetve az  $A'$  pontban érinti.

Ennélfogva

$$\begin{aligned} (ABC \dots) : (A_1B_1C_1 \dots) &= AA_t : A_1A_t = AO : A'O \cos \varphi \\ (A'B'C' \dots) : (A_1B_1C_1 \dots) &= A'A'_s : A_1A'_s = A'O : AO \cos \varphi, \end{aligned}$$

mely proporciók egymással szorozva, az

$$(A_1B_1C_1 \dots)^2 = (ABC \dots)(A'B'C' \dots) \cos^2 \varphi$$

egyenlethez vezetnek. Így tehát :

*Ha valamely sokszögnek szögpontjain keresztül egy tetszés szerinti sugárral párhuzamos sugarakat húzunk, és egy a sokszöghez ugyanegy értelműen hasonló sokszögnek megfelelő szögpontjaiból az előbbi sugarakra merőlegeseket bocsátunk, akkor ezeknek talppontjai egy új sokszögnek szögpontjai. Ez új sokszög területének négyzete egyenlő a két előbbi sokszög területének, és azok két megfelelő oldalától alkotott szög cosinusa szorzatával.*

11. Abban az esetben a midőn az  $ABC \dots, A'B'C' \dots$  hasonló sokszögek megfelelő oldalai egymásra merőlegesek, és az elsőnek szögpontjain keresztül az  $o_s$  sugárral párhuzamos sugarak, a második sokszögnek megfelelő szögpontjain keresztülmenő és az  $o_t$  sugárral párhuzamos sugarakat egy  $A_1B_1C_1 \dots$  sokszög szögpontjaiban metszik, ez utóbbi sokszög területének négyzete, egyenlő a két első sokszög területének és az  $o_s, o_t$  sugaraktól bezárt szög cotangense négyzetének szorzatával; azaz :

$$(A_1B_1C_1 \dots)^2 = (ABC \dots)(A'B'C') \cot^2(o_s o_t).$$

Ugyanis ha az előbbieken használt jelölést megtartjuk és



$$(AA_1, t) = A_t, (A'A_1, s') = A'_s, (AA_1, s') = S^*, (A'A_1, t) = T,$$

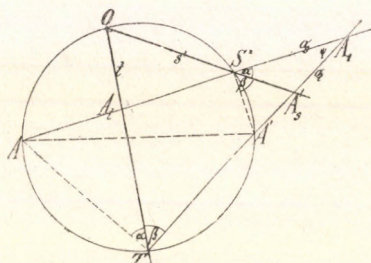
úgy az  $ATA_1$ ,  $A'S^*A_1$  hasonló derékszögű háromszögek miatt  
(5. ábra)

$$\frac{AA_t}{TA_t} = \frac{\sin ATO}{\cos (o_s o_t)}, \quad \frac{A_1 A_t}{TA_t} = \frac{\sin A_1 TO}{\sin (o_s o_t)}$$

$$\frac{A'A'_s}{S^* A'_s} = \frac{\sin A'S^*O}{\cos (o_s o_t)}, \quad \frac{A_1 A'_s}{S^* A'_s} = \frac{\sin A_1 S^* O}{\sin (o_s o_t)},$$

azaz

$$\frac{AA_t \cdot A'A'_s}{A_1 A_t \cdot A_1 A'_s} = \frac{\sin^2 (o_s o_t)}{\cos^2 (o_s o_t)} = \operatorname{tg}^2 (o_s o_t).$$



5. ábra.

Ha ez egyenlet baloldalának értékét az

$$(ABC \dots) : (A_1 B_1 C_1 \dots) = AA_t : A_1 A_t$$

$$(A'B'C' \dots) : (A_1 B_1 C_1 \dots) = A'A'_s : A_1 A'_s$$

proporeziók szorzatába helyettesítjük, akkor az

$$(A_1 B_1 C_1 \dots)^2 = (ABC \dots) (A'B'C' \dots) \cotg^2 (o_s o_t)$$

kifejezést nyerjük, mely a tétel helyességét igazolja.

12. Hátra volna még oly hasonló sokszögekből, az előbbiek szerint leszarmaztatott sokszögek területének kiszámítása, melyek *ellenkező értelműek*. Erre vonatkozólag azt állithatjuk:

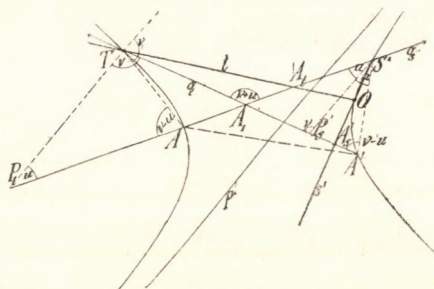
*Ha  $ABC \dots$ ,  $A'B'C' \dots$  ellenkező értelmű hasonló sokszögek elsőjének szögpontjain keresztülmenő és egy  $o_s$  sugárral párhuzamos sugarakat a második sokszögnek megfelelő szögpontjain keresztülmenő és egy  $o_t$  sugárral párhuzamos sugarakkal az  $A_1 B_1 C_1 \dots$  sokszög szögpontjaiban metszszük, és a két első sok-*

szög két megfelelő oldalától képezett szögek egyik felezője  $p$ , akkor a három sokszög területe következőképpen függ egymástól:

$$(A_1 B_1 C_1 \dots)^2 = (ABC \dots) (A' B' C' \dots) \frac{\sin^2((o_s p) - (p o_t))}{\sin^2(o_s o_t)}.$$

Ugyanis ha az előbbieken használt jelölés megtartása mellett a  $p$  végtelen távol fekvő pontja  $Q$ , és (6. ábra)

$$(AA_1, t) = A_t, (A'A_1, s') = A'_s, (AA_1, s') = S^*, (A'A_1, t) = T, \\ (AA_1, TQ) = P_t, (A'A_1, S^*Q) = P'_s,$$



6. ábra.

úgy az  $AA'TS^*Q$  pontokon keresztülmenő egyenoldalú hiperbola miatt

$$T(AA'OQ) \cap S^*(AA'OQ) \cap S^*(A'AQO)$$

tehát

$$AA_1 A_t P_t \cap A' A_1 P'_s A'_s,$$

a mi ekkép is írható:

$$\frac{AA_t \cdot A'A'_s}{A_1 A_t \cdot A_1 A'_s} = \frac{AP_t \cdot A'P'_s}{A_1 P_t \cdot A_1 P'_s}.$$

Ugyancsak az egyenoldalú hiperbola tulajdonsága folytán:

$$\sphericalangle A'S^*P'_s = \sphericalangle P'_s S^*A, \quad \sphericalangle A'TP_t = \sphericalangle P_t TA,$$

$$\sphericalangle TAP_t = \sphericalangle S^*A'P'_s = (o_s p) - (p o_t),$$

és így

$$\frac{AP_t}{TP_t} = \frac{\sin ATP_t}{\sin TAP_t}, \quad \frac{A_1 P_t}{TP_t} = \frac{\sin ATP_t}{\sin(o_s o_t)}, \\ \frac{A'P'_s}{S^*P'_s} = \frac{\sin A'S^*P'_s}{\sin S^*A'P'_s}, \quad \frac{A_1 P'_s}{S^*P'_s} = \frac{\sin A'S^*P'_s}{\sin(o_s o_t)},$$



tehát

$$\frac{AA_t \cdot A'A'_s}{A_1A_t \cdot A_1A'_s} = \frac{AP_t \cdot A'P'_s}{A_1P_t \cdot A_1P'_s} = \frac{\sin^2(o_s o_t)}{\sin^2((o_s p) - (p o_t))}.$$

Ha végre ez utóbbi kifejezést az ismert

$$\begin{aligned} (ABC \dots) : (A_1 B_1 C_1 \dots) &= AA_t : A_1 A_t \\ (A'B'C' \dots) : (A_1 B_1 C_1 \dots) &= A'A'_s : A_1 A'_s \end{aligned}$$

proporeziók szorzatába helyetteszük, úgy a tételben levő

$$(A_1 B_1 C_1 \dots)^2 = (ABC \dots) (A'B'C' \dots) \cdot \frac{\sin^2((o_s p) - (p o_t))}{\sin^2(o_s o_t)}$$

egyenletet kapjuk.

13. Az utóbbi pontban levő tételnek következménye:

a) *Ha valamely sokszög szögpontjain keresztülmenő és egy  $o_s$  sugárral párhuzamos sugarakat, a sokszöghez hasonló és ellenkező értelmű sokszögnek megfelelő szögpontjain keresztülmenő és egy  $o_t$  sugárral párhuzamos sugarakkal metszszük, úgy a metszéspontok egy egyenesben fekszenek, ha az  $(o_s o_t)$  szögnek felezője a sokszögnek megfelelő oldalaival egyenlő szöget alkot.*

b) *Ha valamely sokszög szögpontjain keresztülmenő és egy  $o_s$  sugárral párhuzamos sugarakat, egy a sokszöghez hasonló s ellenkező értelmű sokszögnek megfelelő szögpontjain keresztülmenő oly párhuzamos sugarakkal metszszük, melyek a sokszögek megfelelő oldalaival egyenlő szögeket alkotnak, akkor a nyert metszéspontok egy új sokszögnek szögpontjai lesznek. Ez új sokszög területének négyszete egyenlő a két hasonló sokszög területének szorzatával.*

Az a) tételtől már tettünk említést ez értekezésben; a b) tétel pedig a 10. pont első tétele következményének is tekinthető.

Ugyanis ha két hasonló sokszög ellenkező értelmű, akkor az egyiknek tükörképe egy bizonyos  $p$ , úgyszintén egy bizonyos  $q$  egyenesre vonatkozólag a másik sokszöggel a  $(pq)$  pontra vonatkozólag hasonló fekvésű lesz. A  $p \perp q$  egyenesek pedig a hasonló sokszögek megfelelő oldalaival egyenlő szögeket alkotnak. Ha tehát az első sokszögnek szögpontjain át a  $q$ -val húzunk pár-

huzamos sugarakat, akkor ezek az első sokszög  $p$ -re vonatkozó-  
tükörképének szögpontjain mennek keresztül, és ezért ez az eset  
a 10. pont első tételében érintett esethez is sorolandó, melynél  
a sokszögek hasonló fekvésűek.

14. Ide iktatjuk még minden bebizonyítás nélkül a következő  
általános tételt:

*Ha két sokszög, melynek területe  $\Delta, \Delta'$ , ugyanegy értelműleg  
hasonló, tehát az első sokszög egy bizonyos  $\varphi$  szög alatt egy  
pont körül forgatva a másikkal hasonló fekvésbe hozható, és ha  
az első sokszög szögpontjain keresztül egy  $o_s$  sugárral párhúza-  
mosan menő sugarakat, a második sokszögnek megfelelő szög-  
pontjain keresztülmenő és egy  $o_t$  sugárral párhuzamos suga-  
rakkal metszszük, akkor e metszéspontok egy új sokszögnek szög-  
pontjai lesznek. Ez utóbbi sokszög területének négyzete:*

$$\Delta_1^2 = \Delta \Delta' \cdot \frac{\sin^2(\varphi + (o_s o_t))}{\sin^2(o_s o_t)}.$$

*Klug Lipót.*



## A SZÍNES FÉNYKÉPEZÉSRŐL.

Mult év december havában a társulat egyik ülésén szerencsém volt a vetítésre való *«kromskop»*-öt bemutatni. A következőkben ezen eszköz ismertetése kapcsán a színes fényképezés összes módszereiről főbb vonásokban beszámolok, nem annyira a gyakorlati kivitel, mint inkább csupán az elvi álláspontok szempontjából.

A *«színes fényképezés»* kifejezéssel nem annak szószerinti értelmét kívánom jelelni, hanem ezen elnevezés alatt összefoglalom mindazon eljárásokat, a melyekkel, bár kerülő úton is photographikus methodusokkal a tárgyak képeit oly módon reprodukáljuk, hogy ezek bennünk ugyanazon színérzéseket keltik, mint maguk a lefényképezett tárgyak.

A színes fényképezés módszerei két nagy csoportba oszthatók: az egyik *közvetlenül*, a másik *közvetve* igyekszik a kérdést megoldani.

Tárgyaljuk először a *közvetlen eljárásokat*, a melyek egyébként legalább részleg időrendben is megelőzték a közvetett módszereket.

Tudvalevőleg a fordított kép, a melyet a fényképező készülék lencséje a hátsó tejüvegére vet, színes; a rendes eljárásokkal készített photographia azonban csupán fekete és fehér árnyalatokat ad a színek helyett; sőt ezen árnyalatok mélysége sem felel meg tökéletesen azon fényérzéseknek, a melyet a tárgy közvetlenül reánk gyakorol. Ennek egyszerű oka az, hogy a rendszeren használt ezüstbromidot vagy ezüstchloridot tartalmazó lemezek főleg a kék és ultraviolette sugarak iránt érzékenyek, s így a képek a többi színeket csak annyiban tüntetik fel, a mennyiben azok kék, illetve ultraviolette sugarakat tartalmaznak. A kék színű tárgy például, a mely



különben szemünkre nem valami intensív hatást gyakorol, fehér, a szemet sokkal inkább ingerlő sárga, zöld és vörös pedig fekete lesz a pozitív képen. Ezen a bajon már meglehetősen segítünk akkor, ha a felvétel eszközlésekor a fényképező készülék elé egy ideig alkalmas árnyalatú sárga üveget tartunk; ezzel ugyanis azt érzük el, hogy a kevésbbé hatásos sugarak a lemezre hosszabb ideig hatnak, mint a hatásosak, s így a kép árnyékolása a valóságnak jobban megfelel. Még jobban elérjük ezt a LIPPMANN-tól származó úgynevezett hármass expositióval, a mikor a tárgyat akként vesszük fel, hogy a fényképező készülék elé kék, majd zöld és végül vörös üveget teszünk.

A fényképezés e hibáját továbbá akként is javíthatjuk, hogy megfelelően praeparált úgynevezett színérző *ortho-* vagy *isochromatikus* lemezeket használunk. Az ilyen lemezek ugyanis bizonyos festőanyagot «sensibilator»-t tartalmaznak, a mely azután a lemezt egyes színű sugarak iránt érzékenynyé teszi. Nem akarok a jelenleg már nagy számban ismert és behatóan tanulmányozott sensibilatorokkal foglalkozni, csupán egynehányat példaképen felemlíték: az eosin a zöldes-sárga, a cyanin a vörös és narancs, az erythrosin a sárga, a salicin a vörös és zöld fény iránt teszi érzékenynyé a fényképező lemezt. Ujabban már alkalmas sensibilatorokkal praeparált panchromatikus lemezeket is készítenek, a melyek valamennyi szín iránt érzékenyek, ha nem is tökéletesen abban a fokban, mint az emberi szem. Az ilyen lemezekkel készített képek azután az árnyalatokat hűen reprodukálják.

1. A törekvés, hogy a fénykép ne csupán az árnyalatokat hűen feltűntető hideg és üres rajz, hanem a valóságnak megfelelő színekben pompázó kép legyen, majdnem egykorú magával a fényképezéssel. Már pár évvel a daguerreotypia felfedezése után HERSCHEL 1839-ben tapasztalta, hogy az érzékeny chlorezüst papír élénk vörös és halvány zöld színű lett a reája vetett napfény spectrumának megfelelő helyein, a többi színek pedig hiányzottak, fixálni azonban még ezt a két szint sem lehetett. — BECQUEREL 1848-ban már megmutatta, hogy a sötét kamarával a tárgyak színeit is közvetlenül



lefényképezhetjük. Ő ugyanis DAGUERRE-féle lemezen a nap teljes spectrumának, továbbá egyes tárgyaknak színes és hű képét készítette el, a melyeket azonban rögzítenie egyáltalában nem sikerült. Eljárásának lényege abban áll, hogy ő az ezüst, illetve ezüstözött lemezt, nem ioddal, mint az a rendes DAGUERRE-féle eljárás szerint történik, hanem chlorral tette érzékenynyé. Ugyanis az ezüst lemezt rézsulfátnak és natriumchloridnak alkalmas összetételű vizes oldatába mártotta, a mikor is annak felületén ezüstsubchlorid  $Ag_2Cl$  réteg keletkezik; minthogy azonban az így keletkezett réteg nagyon vékony, már maga BECQUEREL később elektrolitikus úton választotta ki a chlort az ezüst lemezen. Az így praeparált és alkohollal hirtelen megszáritott lemeznek felületét kissé megtisztítva, azt a fényképező készülékbe vitte. Az exponált lemez színei, a mint azt a későbbi kísérletek is igazolják, tényleg megfelelnek a valóságnak, azonban a bármimódon véghezvitt fixálás mindig az ezüstsubchloridnak a következő  $Ag_2Cl = Ag + AgCl$  egyenlet értelmében való elbomlására vezet, a mikor is a kép a kiváló ezüstitől elfeketedik.

Elvileg hasonló eljárással NIEPCE DE SAINT-VICTOR üveg lemezen, A. POITEVIN pedig papíron készített színes képeket. Úgy ezen, valamint a többi ugyancsak a BECQUEREL-féle alapjelenségen alapuló későbbi eljárásokat nem akarom itt e helyen részletezni. Egyike a legjobbaknak a KOPP-féle (Britt. Journ. of Photography 1892. 271.), a mely szerint a rézsulfat, kaliumbichromát és ezüstsubchloriddal praeparált papírt exponálván, a képet tulajdonképen nem fixáljuk, csupán egyes oldatokban áztatván azt érzük el, hogy a kép sötét helyen jó ideig eltartható. Ezenkívül hasonló módon oly képek is készíthetők, a melyeket véglegesen rögzítünk, ezeken azonban a színek igen sokat veszítenek természetességükből. Ilyen fajta képeket készít nálunk VERESS FERENCZ Kolozsvárott.

WIENER (Eder, Jahrbuch für Photographie 1896. 55.) behatóan foglalkozván az ezen eljárás szerint készült képekkel, kimutatta, hogy a BECQUEREL-féle képeken az interferencia jelenségnek, a mely a később tárgyalandó LIPPMANN-féle eljárásnak lényegét képezi, van némi szerepe; de már itt is jó részben és a későbbi eljárások

szerint készített képeken csupán, ha szabad ugyan ezt mondani, tényleges «testi színekkel» van dolgunk. Annak magyarázatát, hogy miért válik az ezüstsubchlorid oly színűvé, mint a milyen fény éri, WIENER abban találja, hogy e bomlékony vegyületnek mindig oly színű módosulata lesz a legállandóbb, mint a milyen színű fényvel azt megvilágítjuk, mert ez legkevesebb fényt absorbeál, míg a más színűek sok fényt nyelvének el, elbomlanak.

Az itt tárgyalt mondjuk BECQUEREL-féle eljárások a színes fényképezés feladatát bizony csak tökéletlenül oldják meg. Az aránylag elég jó színes képek nem tarthatók el, a maradandóakon pedig a színek tökéletlenek.

2. Sokkal tökéletesebben oldja meg feladatát és különösen tudományos szempontból sokkal érdekesebb és fontosabb a közvetlen színes fényképezés egy másik LIPPMANN-tól való módja. Ő elvben egyszerű és raczionális eljárásának megállapítására a fény teoriájából kiindulva mindennek előtt azon két feltételt tartotta szem előtt, a mely elméletileg arra szükséges, hogy a valóságnak megfelelő színes fényképeket kapjunk.

Az egyik szerint szükséges, hogy a fényképező lemez érzékeny rétege folytonos legyen, és ne olyan, mint a rendesen használtaké, a mely tudvalevőleg gelatinnal készített emulsiója a vízben oldhatlan ezüstbromid vagy ezüstchloridnak. E célzt LIPPMANN úgy érte el, hogy a gelatin, albumin vagy collodium réteget vízben oldható kalium-chlorid, — bromid vagy — jodiddal telítette és az így praepartál lemezt ezüstnitrát oldatban áztatta, a mikor is a keletkező megfelelő ezüst só folytonos réteget képez. — A másik feltétel, hogy a fényképező lemez érzékeny rétege közvetlenül valamely tükröző felületre feküdjék rá. E célra LIPPMANN külön cassettákat készített, a melyekbe a lemezt fordítva helyezi be úgy, hogy üveges oldala nézzen a tárgy felé, az érzékeny oldal mögé pedig higanyt szorít fel, a mely a reflectáló felületet képezi. Ezek után a lemezt a fényképező készülékbe téve rendes módon vagy közvetlenül, vagy a mint legtöbb esetben célszerűbb, színes üvegeket és pedig vörös, zöld és kék üveget alkalmazva exponáljuk. Az exponált lemezt a



rendesen szokásos eljárással hívjuk elő és fixáljuk. Az előhívás tudvalevőleg abban áll, hogy a lemezt valamely redukáló oldatba téve, abban a megvilágított ezüst vegyület a megvilágítás arányában redukálódik, azaz fém ezüst válik ki. Az előhívott lemezt megmosván, a fixáló oldatba natriumthiosulfat oldatba viszzsűk, melyben a változatlanul maradt ezüstvegyület vízben oldható ezüstthiosulfáttá és natriumezüstthiosulfáttá alakul, a mi vízben oldható lévén, a fixálást követő hosszabb ideig tartó áztatáskor a lemezből kioldódik, úgy hogy a kész kép csupán fém ezüstöt tartalmaz. A LIPPMANN-féle fényképen is előhíváskor ezüst válik ki, a kép tehát fekete; azonban a lemez száradásakor a színek mind jobban és jobban előtűnnek. A száraz lemez sötét alapon szembe nézve a természetes színeket mutatja.

A színek létrejöttének okát a fellépő interferencia jelenségben találjuk. E színek karaktere ugyanaz, mint a vékony lemezek avagy a NEWTON-féle gyűrűk színeié. A lemezre eső és a tükröző higanyfelületről visszaverődő fénysugarak interferálván, álló hullámok keletkeznek.

Az álló hullámok csomópontjaiban a fényhatás zérus lévén, a későbbi kezeléskor e helyen nem redukálódik az ezüst vegyület, míg a közbülső helyeken igen. Ennek folytán az elkészített kép rétegzett lesz, és pedig oly módon, hogy az illető rétegek vastagsága az illető fény félhullámhosszával egyenlő. A vékony rétegeknek ezen finom és nagy számú sorozata reflectált fényben természetesen oly színű lesz, mint a milyen félhullámhossznak a réteg vastagsága megfelel, a fény intenzitása pedig a rétegek számától függ. Áteső fényben a *complimentair* színeket fogjuk látni; természetes továbbá az is, hogy a színek csak akkor lesznek a tárgy valódi színeinek megfelelőek, ha a képet bizonyos a felvételnek megfelelő szög alatt nézzük; más és más szög alatt nézve a kép más és más színűvé válik, színt játszik, mint a szappanbuborék. E képek éppen ezért nem egyszerű megtekintésre, hanem reflektált fényben való vetítésre alkalmasak. LIPPMANN a nap spektrumáról (1891. *Comptes Rendus* 112. 274.) majd LUMIÈRE-el együtt egyes színes tárgyakról, sőt tájakról gyönyörű felvételeket eszközölt, a melyekben az összes



színárnyalatok megvannak. Minthogy az egyszerű felvételnél a lemeznek a különböző fénynemek iránt való különböző érzékenysége folytán az intenzitás viszonyok megváltoznak, s így a kép e tekintetben reánk nem egészen a valóságnak megfelelő hatást gyakorolja, LIPPMANN felvételeit hármassal expositióval (kék, zöld és vörös üvegen át) készítette.

Ujabbán LIPPMANN-on kívül többen foglalkoztak a fényképezés e módjával, így CH. TRONIG (Americ. Journ. of Photogr. 1891. 553), H. KRONE (Deutsche Phot. Ztg 1892. 29) stb. Jelenleg oly lemezek is készíthetők, a melyek már egyszerű exponálással helyesen adják vissza az intenzitás viszonyokat is.

Az elmondottakból láthatjuk, hogy a theoretikus szempontból igen érdekes LIPPMANN-féle photographiák, hogy úgy mondjuk nem igazi színes, hanem szintjatszó képek, a melyek azonban vetítésben várakozásunknak tökéletesen megfelelnek. Eltekintve e fényképek kissé körülményes előállításától, nagy hátránya ezen eljárásnak az abban szükséges hosszú  $\frac{1}{4}$  —  $\frac{3}{4}$  óráig tartó expositio idő.

Szemben az eddig ismertett közvetlen eljárásokkal ujabbán mindinkább előtérbe lépnek a *közvetett* módszerek. Ezek a színes fényképezés kérdését általában a következő módon oldják meg: A lefényképezendő tárgy színeit bizonyos alapszínekre, rendesen három alapszínre bontjuk akként, hogy ugyan arról a tárgyról egy-másután három felvételt eszközölünk csupán azzal a változtatással, hogy egy-egy alapszínnek választott színes üveget vagy gelatinet mondjuk «fényszűrőt» teszünk a lemez elé. A felvétel után a képeket előhíván és rögzítvén három fekete negatívot kapunk, a melyekben azonban az árnyalatviszonyok mások és mások. Az így nyert negatívokról azután üvegre positivokat készítünk, a melyeket vagy festékekkel megfelelően megfestünk, vagy melléjük megfelelő színű üveget vagy gelatinet teszünk s azután ezeket összehozzuk. Ha az alapszíneket kellő módon választottuk meg, s egyszersmind arra is ügyeltünk, hogy a képek erőssége is megfelelő legyen, kell hogy az így összetett három színes kép ugyanazon impressiót gyakorolja reánk, mint maga a lefényképezett színes tárgy. Szóval röviden mondhatjuk, hogy a felvétel a színek optikai analysisével, a repro-



ducálás azoknak optikai — sőt egyes eljárásoknál (Joly) érzésszerű — synthesisével van egybekötve. Előre gondolhatjuk, hogy ezen eljárásoknál a legnagyobb nehézség első sorban az alapszínek kellő megválasztásában van. A legtöbb eszköznél színes üveget, vagy színes gelatine-nal bevont üveget használunk, a melyek készítését azonban tekintettel az ipari versenyre, a szerzők nem igen közlik.

Első pillanatra a később tárgyalandó JOLY-féle eljárás, a közvetett módszerek imént adott jellemzése szerint, azoktól eltérőnek látszik, mert itt hármasszínű ernyő azaz fényszűrő alatt csupán egy felvételt eszközölünk; részletezésénél azonban rögtön látni fogjuk, hogy lényegileg ez is ugyanaz.

Egyszerűség kedvéért eltérve a chronologikus sorrendtől tárgyaljuk ezen eszközök, illetve eljárások három típusos alakját, s ezek köré csoportosítsuk a főbbek közül a fontosabbak egyéniségét. E három típusos eljárás IVES, LUMIÈRE, illetve JOLY-tól való.

3. FREDERIC IVES Philadelphiában az indirect színes fényképezésre és a képek reproducálására speciális eszközt szerkesztett, melyet *kromoskop*, illetve *chromoscope*-nak nevezett el. (Az erről szóló fontosabb értekezések: Americ. Journ. of Photography Philadelphia 1891, 87; 1892, 515; 1893, 82; Journ. of the fotogr. Society of Philadelphia 1894, 26; 1895, 8; Photographic Times Almanac. New-York 1895, 241; The Photographic Journ. London 1897, 173; Eder's Photographische Correspondenz 1893.) Az eszköz nagyon lassan vált ismeretessé, ujabbban a londoni «The photo-chromoscope syndicate limited» terjeszti.

Szerző alapszínnek a vöröset, zöldet és ibolyát választja; az illető tárgyról tehát egymásután három felvételt kell eszközöznünk akként, hogy egyszer vörös, majd zöld, majd ismét ibolya üveget teszünk a lemez elé. Egyszerűbb kezelhetőség kedvéért szerző külön cassettákat, sőt még egész külön fényképező készüléket is szerkesztett. — A cassetta, mely úgyszólván minden rendes fényképező eszközre reá alkalmazható, hosszúkás alakú úgy, hogy a beléje tett lemezre mind a három képet egymás mellett felvehetjük. A lemezt egymás mellé erősített vörös, zöld és ibolya színű üvegből álló fedél

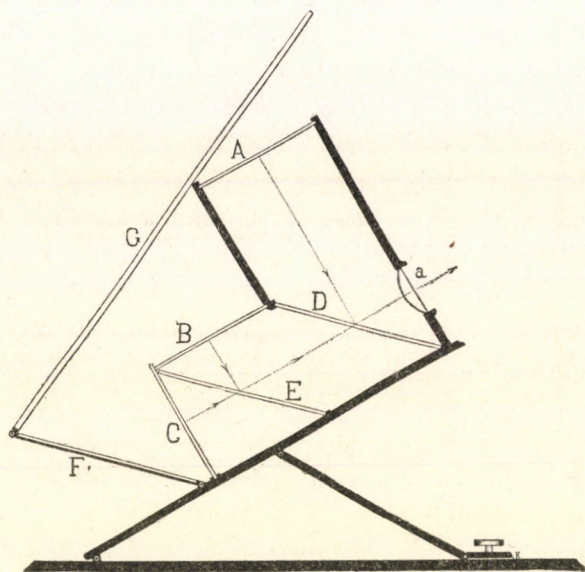
takarja, a melylyel együtt a cassetta a fényképező készülékhez képest eltolható akként, hogy a vörös vagy zöld, illetve ibolya üveggel fedett lemezrészlet képezze a sötét kamara hátsó lapját.

Ily módon tehát minden nagyobb nehézség nélkül csupán a cassetta eltolásával a három felvételt egymás után elvégezhetjük. Közönséges lemezek e célra nem alkalmasak, mert ekkor az expositio időiben igen nagy különbségeknek kell lenni; ezért panchromatikus lemezeket használunk, de még ezeknél is rendszeren a vörösre, illetve zöldre 7, illetve 8-szor annyi idő kell, mint az ibolya színű üvegen keresztül eszközölt felvételre. A külön e célra szerkesztett fényképező eszközre nézve, a melylyel mind a három felvételt egyszerre végezhetjük, csupán annyit jegyzek meg, hogy szerkezete hasonló, csak fordított alakban, ahhoz az alább tárgyalandó eszközhöz, melyet szerző a kromskop-képek úgynevezett kromogramok vetítésére használ; ugyanis a készülék lencséjén belépő fénynyalábot  $45^\circ$  alatt álló üveglemezekkel, a melyek azt részben visszaverik, részben átbocsátják, három nyalábra bontja. E három nyalábból alkotott képeket prismákban való totalis reflexio segítségével egymás mellé hozza a lemezre, melyet úgy mint előbb háromszínű üvegfedél takar. Az exponált lemezt a rendes módon előhívjuk és rögzítjük, s aztán róla üvegre készítünk pozitív másolatot, azaz diapositiv képet. E képeket, a melyek természetesen csupán fekete és fehér árnyalatúak, megfelelő színes üvegeken keresztül megvilágítjuk s a *kromskop*-pal vagy vetítéskor a *kromskop lantern*-nel összehozzuk.

A kromskop vázlatos metszetét az 1. ábra mutatja: *A*, *B* és *C* a vörös, ibolya, illetve zöld üveg, a melyekre a vörös, ibolya, illetve zöld üvegen keresztül felvett képek pozitívjait tesszük. Ezeket az *E* és *D* üveglapok részben visszaverés, részben átbocsátás útján összehozzák, úgy hogy az *a* lencsén a készülékbe nézve azokat egymáson, illetve a tárgyat természetes színeiben látjuk. *F* tükör és *G* tejüveg csupán a képek egyenletes megvilágíthatóságát célozza. Szerző az eszközt stereoskop formában is készítetteti, a mikor is három stereoskop képpárt hozunk vele össze, s így a tárgyat térbelileg és természetes színeiben látjuk.



Ha a fényképező lemez épen olyan fokban volna érzékeny a különböző színek iránt, mint szemünk, akkor az alapszínek kellő megválasztásával a reprodukáláskor vagy mondjuk a «positiv művelet»-nél ugyanazokat a színes üvegeket kellene használnunk, mint a melyeket a felvételnél a «negatív művelet»-kor használtunk. Minthogy ez még az expositio idői kellő megválasztásával sem érhető el tökéletesen, az ebből származó hibát azzal javítjuk ki,

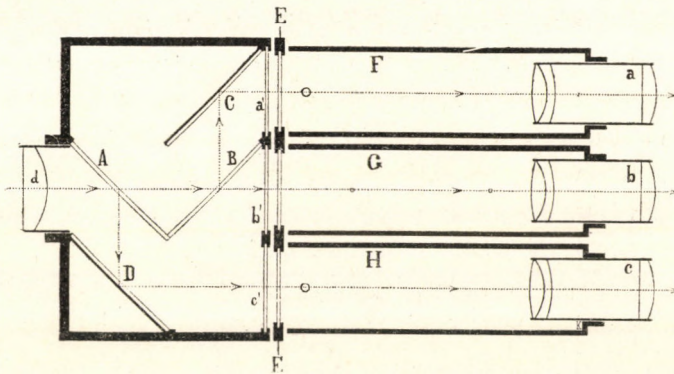


1. ábra.

hogy pozitív színes üvegekül kissé más árnyalatúakat használunk, mint a milyenek a negatívok voltak.

A kromskop-lantern vázlatos metszetét, a melyet áttekinthetőség kedvéért nem egészen a tényleges szerkezetnek megfelelőleg közlök, a 2. ábra mutatja. A  $d$  condensor lencsén keresztül a vetítő lámpa fénye az eszközbe jutva  $A$  és  $B$  üveglapok, továbbá  $C$  és  $D$  tükrök segítségével három  $a$   $b$  és  $c$  felé irányított nyalábra bomlik, s megvilágítja az  $a'$   $b'$  illetve  $c'$ -ben elhelyezett vörös, zöld és ibolya üve-

geken keresztül a mögéjük állított s egyszerűség kedvéért *E* keretbe foglalt megfelelő képeket. A három most már színes képet az ábrában csupán jelzett *a b c* minden irányban mozgatható vetítő lencsékkel az ernyőre egyenlő nagyságban egymásra vetítjük. Könnyebb kezelhetőség kedvéért az *F* és *H* rekeszek a megfelelő *C* és *D* tükrökkel együtt a *G* rekeszhez képest közös emelő karral széthajlíthatók, a mi által a képeket egymástól könnyen szétválaszthatjuk és azután ismét összehozhatjuk; ezt azonban az ábrán nem tüntettem fel. A színek és színárnyalatok természetűsége, különösen transparens



2. ábra.

ernyőre való vetítéskor, valóban meglepi az embert; kiválóan kel azonban ügyelnünk arra, hogy a képek tökéletesen összeessenek, mert különben a tárgyak szélein látható színes vonalak, s a nem helyesen keveredő színek a hű színhatást mondhatni tökéletesen lerontják.

Már 1869-ben CH. CROS és DUCOS DU HAURON hasonló eszközt készítettek, a melyet ujabban (Photographic Times Almanac. New-York, 1899. 156.) chromographoscope néven hoztak forgalomba. Némikülönbséggel ők is ugyanazon alapszíneket használják, mint Ives, a pozitívokat azonban nem a rendes, hanem a később tárgyalandó LUMIÈRE-féle gelatine eljáráshoz hasonló módon



készítik s ezeket megfestvén, a három festett képet a kromskophoz hasonló eszközzel összehozzák.

B. J. EDWARDS (Journ. Soc. Chem. Ind. 15. 293) vörös és zöld alapszínnel; K. ZINK (Deutsche phot. Ztg. 19. 67) ugyancsak három alapszínnel a kromskophoz hasonló eszközt szerkesztett.

4. Ezek után térjünk át azon módszerre, a melyet AUGUSTE és LOUIS LUMIÈRE már régebben (1895. Comptes Rendus. 120. 875) megállapított ugyan, de a mely csak mult év folyamán lett gyakorlatilag annyira kezelhetővé, hogy szerzők képeiket forgalomba hozhatták. A képek stereoskop alakban készülnek; az elsőket közülök MASCART mutatta be a francia akademiának (Comptes Rendus 126. 809). Ezen eljárásnál is egymásután három felvételt eszközölünk, nevezetesen vörös, zöld és kék fényszűrőn keresztül. Ezeket a szokásos módon hívjuk elő és rögzítjük. A negatív eljárás tehát ugyanaz, mint a melyet IVES használ; szerzők csupán abban tértek el ettől, hogy a három képet nem ugyanazon panchromatikus lemezre, hanem mindegyiket külön-külön az illető színű fény iránt legérzékenyebb lemezre veszik fel. A pozitív eljárás azonban az Ives-féltől eltérő. Szerzők a pozitív képeket nem színes üveggel, hanem közvetlenül festékekkel színezik. Minthogy pedig a rendes eljárással készült fekete árnyalatú pozitív képek, a mint az a kromskopnál is tapasztalható, ha azokat akár üveggel, akár festékekkel megszínezzük, sötétek lesznek, azért LUMIÈRE-ék a gelatine eljárásnak egy specialis nemét használják, a mely különben a képek megfesthetősége szempontjából is nagyon előnyös. Ugyanis 10% hideg vízben oldható tiszta gelatine 5% ammoniumbichromat és 5—10% bromezüstből készített emulsio képezi az érzékeny réteget. A lemezt exponálván a gelatine, a fennebbi viszonyok között a megvilágított helyeken a megvilágítás arányában oldhatatlanná válik. Ha tehát az exponált képet hideg vízzel jól kimossuk és fixirnatronnal a bromezüstöt belőle kioldjuk, akkor alig látható gelatine képet kapunk, a melyet megfestvén, a kép az illető színben részletekben gazdagon láthatóvá válik. Szerzők az előzőktől ezenkívül abban tértek el, hogy ők a három megfestett képet ugyanazon lemezen már egymásra hozva



állítják elő és pedig a következő módon: Elkészítik és megfestik a lemezen a vörös pozitívot, most a képet finom collodiumréteggel vonják be, különösen ügyelve arra, hogy e réteg vízáthatlan, tehát szép folytonos legyen; erre egy második érzékeny réteget öntvén, arra a zöld pozitívot másolják le a fennebb említett módon s megfestik, majd ismét collodium, illetve gelatine réteget öntve a lemezre ezen a kék képet készítik el; sőt azon esetben, ha a színárnyalatok nem felelnek meg jól a valóságnak, akkor még egy negyedik, esetleg ötödik képet készítenek el ugyanazon lemezen, melyek kellő festésével a hibát corrigálják. A LUMIÈRE-féle kép tényleg színes fénykép; ez elnevezés talán legjobban e képeket illeti meg, a melyek a tárgyak színeit valóban nagy természetűséggel mutatják.

Festett képek készítésére más eljárások is ismeretesek. Így G. A. RICHARD (Comptes Rendus 122. 609) szerint a rendes lemezen elkészített képeinket akként festhetjük meg, hogy a kiválotzt ezüstöt sóvá alakítjuk, a melyet azután megfelelő organicus anyagokkal hozva össze, az ezüstsó mennyiségének megfelelő arányban festék képződik. Ez eljárást egyébként nem részletezzük.

5. JOHN JOLY a dublini Trinity College tanára 1894-ben az indirect színes fényképezés következő módját állapította meg: (Journ. Soc. Chem. Ind. 13. 1088; Photographic Times Almanac 1899. 84; Photographische Correspondenz 1899. 26.) A tárgy színeit ugyancsak három alapszínre bontván, az eredeti színeket az alapszíneknek nem egymás felé, hanem egymás mellé tevésével hozzuk ki. Szóval JOLY a színkeverésnek a festészetben már régebben ismert azon módját alkalmazza, melyet először 1839-ben MİLÉ használt a színek keverésére, hogy t. i. egymásmellé finom váltakozó színű vonalakat húzván, ha a képet elég messziről nézzük, a színérzések összefolyva a keverékszín érzését adják. Hogy ezt elérhessük, a vonalak egy-egy váltakozó csoportjának nem szabad egy ívpercznél nagyobb látószög alatt látszania, mert ez körülbelül azon átlag (az egyéni eltérések igen nagyok: 90—10 másodpercz), a melynél kisebb tárgy részleteit szemünk megkülönböztetni nem képes.



JOLY a felvételt akként eszközli, hogy előzőleg a lemezre és pedig közvetlenül az érzékeny rétegre finom úgy  $\frac{1}{10} - \frac{1}{9}$  mm. széles háromszínű vonalakkól alkotott rácsot tesz. Az e célra használt panchromatikus lemezt az expositio után rendes módon kezeljük, s róla positiv copiát készítünk. A positiv képre megfelelően háromszínű rácsot téve azt, akár közvetlenül, akár vetítésben elég messziről nézve természetes színekben fogjuk látni. Legkényesebb pontja ezen eljárásnak a finom háromszínű rácsnak a készítése. JOLY eleintén ezt finom selyem, illetve üvegszálakból, később egyszerűen úgy készítette, hogy gelatine-nal bevont üveg lemezre kihúzó tollal finom színes vonalakat húzott. Jelenleg a Natural Colour Photographic Company, melynek JOLY 1897-ben találmányát átadta, gyárilag készíti e rácsokat. A színeket illetőleg a vörösre a chrysoidin-oranget, zöldre az æthylzöld és chrysoidin-orange keverékét, kékre pedig az oldható vizikéket használják. A positiv rács hasonló okokból, mint a chromoscopenál, kissé más színárnyalatú, mint a negatív.

JOLY színei sokszor nem elég elevenek, s továbbá a képnek többnyire érezhető recézettsége bántja a szemet; épen ennek elkerülése végett vetítések alkalmával czélszerű a képet nem egészen élesre beállítani.

Ehhez hasonló MC. DONOUGH-nak már JOLY előtt két évvel 1892-ben Amerikában szabadalmaztatott azon módszere, mely szerint úgy a negatív, mint a positiv eljárásnál háromszínű porból való fényszűrőt használ. Az eljárás JOLY-énál tökéletlenebb, mert egyrészt a por nem osztható el elég egyenletesen, másrészt minden képhez épen ezért a maga ernyőjét kell használnunk.

Összegezvén az előzőket látjuk, hogy a színes fényképezésnek jelenleg öt módja ismeretes: két közvetlen a BECQUEREL és LIPPMANN féle, három közvetett az IVES, LUMIÈRE és JOLY-féle.

A rögzíthető BECQUEREL képek színei nagyon tökéletlenek; a LIPPMANN-félékben a színek tökéletesek, de a kép szintjatszó s főleg csak visszavert fényben való vetítésre alkalmas.

A közvetett eljárással készült képek közül legkellemetlenebbek s

festményszerűek JOLY-éi. Leghűebben nyújtják a természetes színeket az IVES-féle kromogramok, melynek azonban nagy hátránya, hogy a képeket minden alkalommal külön össze kell hozni. Épen ezért, mint színes fényképet egyelőre legtökéletesebbnek a LUMIÈRE-félét kell tartanunk, bár ezekben egyes színárnyalatok nem oly elevenek, mint a kromskopban; valószínű azonban, hogy a festő anyagok jobb és jobb megválasztásával, e képeken a legfinomabb színárnyalatok is tökéletesen elevenek és élethűek lesznek.

*Pekár Dezső.*



## A FOTOMETRIAI EGYSÉGEKRŐL.

A fényegység oly fényforrás, melynek világító erejére minden más fényforrás világító erejét vonatkoztatjuk. Absolut fényegységünk, — olyan tudniillik, melynek pontossága kifogástalan, és a mely igazán általános használatnak örvendene, — még máig sincs. Igaz ugyan, hogy az 1884. nemzetközi konferencia VIOLLE platina egységét fogadta el a fényforrások intenzitásának egységéül; de ez sem a tudományos, sem a gyakorlati életben a lefolyt idő alatt nem tudott szilárd gyökeret verni. Hogy nincsen a közhasználatban pontos fényegységünk, annak okát a fényforrás változékonyságában kell keresnünk. Ugyanis az izzó szilárd testeknél egyrészt a hőmérséklet meghatározása, másrészt az állandó kisugárzási képességnek megtartása igen nehéz. A lángoknál pedig a világító erő nagy mértékben függ a világító anyagtól (petroleum, gáz stb.), a meteorológiai befolyásoktól és a láng magasságától.

Azok a kongressusok, melyek eddigelé fotometriai tárgyalásokkal foglalkoztak, annak egységeit csak részletes megvitatás alá vették és inkább magukban álló, mint általános határozatokat hoztak. Így a nevezetesebbek is, mint az 1884. konferencia és az 1889. nemzetközi elektromos kongressus, mindkettő Párisban.

Az 1884. konferencia volt az első, mely általános fotometriai egységet állított fel, midőn a következő határozattal VIOLLE étalonját fogadta el: \* *Az egyszínű fény egysége* ugyane színnek az a fénymennyisége, melyet egy négyzetcentimeter platinafelület merőleges irányban sugároz ki abban a pillanatban, midőn cseppfolyós állapotból szilárdba megy át. És: *a fehér fény gyakorlati*

---

\* WIEDEMANN. Annalen. 1884, p. 616.

*egysége* az az összes fény mennyiség, melyet egy négyzetcenti-meternyi platinafelület megszilárdulásának pillanatában sugároz ki. Viollenak nagybecsű dolgozata,<sup>1</sup> melyben a fotometriai egységekre vonatkozó vizsgálódásait, platinaegységének a CARCEL lámpához való viszonyát teszi közzé a Journal de Physiqueben jelent meg.

Az 1889. elektromos kongressus, meggyőződven arról, hogy a platinaegység gyakorlati előállítása igen nagy nehézségekbe ütközik, épp VIOLLE ajánlatára azt határozta: hogy a fotometriai méréseknél (a lámpák intenzitásának meghatározására) gyakorlati egységül, *tizedes gyertya* (bougie décimale) név alatt az a gyertya szolgáljon, mely az 1884. nemzetközi konferencia által meghatározott abszolút fényegységnek a huszadrésze.<sup>2</sup> E tizedes gyertya mintegy 0.1 Carcelnek felel meg.<sup>3</sup>

Ugyane kongressuson PREECE azt ajánlotta, hogy a megvilágítás egységül a *lux*-ot fogadják el, a mely nem lenne más, mint egy CARCEL lámpának 1 meter távolságban létesített megvilágítási erőssége. A németek a megvilágítás egységül WEBER LEONHARD ajánlatára a *metergyertyát* használják; ez elnevezés ellen azonban azt a lényeges kifogást lehet tennünk, hogy ily szóösszetétel inkább szorzást jelent, nem pedig azt a mit ki kellene fejeznie, t. i. négyzetszámmal való osztást.

Az említett kongressusok határozatai többé már nem feleltek meg a gyakorlati élet növekedő szükségleteinek; azért is az 1896. genfi nemzetközi elektromos kongressus munkálatainak sorába a fotometriai egységek tárgyalását is fölvette és a részletes jelentéssel BLONDEL párisi tanárt bizta meg.<sup>4</sup>

<sup>1</sup> «Sur l'étalon absolu de lumière». Par M. J. Violle. Journal de Physique. 1884, p. 241.

<sup>2</sup> Elektrotechnische Zeitschrift. 1889, p. 469.

<sup>3</sup> Nálunk a gázlángok intenzitásának mérésére az angol normál gyertyát a *candle*-t használják, melynek lángmagassága 43—45 mm. és óránkénti fogyasztása 7.79 gr.

<sup>4</sup> E jelentés 40 nyomtatott oldalra terjedt, melyet a szerző betegsége miatt személyesen nem adhatott elő.



BLONDEL célul tűzte ki, hogy a fénymennyiségek és egységek meghatározására oly okszerű és teljes rendszert állapítson meg, mely a fotometriai tanulmányoknak épp oly tudományos alapot és tökéletes terminológiát adjon, mint a minő már a physikának más szakjában van. Az érdekes jelentés kivonatát a következő sorok ismertetik.\*

I. *Fotometriai mennyiségek.* Eddigél minden rendszer nélkül alkalmazták a fényre vonatkozó kifejezéseket: a fénymennyiséget, az intenzitást, a fényességet, a megvilágítást, és sokszor ugyanazt a műszót igen különböző mennyiségek jelölésére használták. E miatt gyakran zavar keletkezett, melyet ezentul ki kell kerülnünk. Tanácsos lesz tehát a fényre azokat az analog meghatározásokat alkalmaznunk, melyeket a mágnesség tanulmányozásánál használunk, így a három alapmennyiség lesz: a mágnesi áramnak megfelelőleg a *fényáram*; egy mágnesi sark intenzitásának megfelelőleg, *egy meghatározott fényforrás intenzitása*; és a *megvilágítás*, mely ugyanazt a szerepet játsza mint a mágnesi indukció.

Az első ismeret, melyre a kísérletezéseknel szert teszünk, a felületek szembetűnő fényessége, melyet nem kell összetévesztenünk annak megvilágításával. Mindamellet czélszerű a fénymérés alapmennyisége gyanánt a *fényáramot* venni föl, mert ez az időegység alatt történt kisugárzások *energiájával* arányos. Igaz, hogy az arányosság együtthatója a fény színeképi összetételétől függ és kell, hogy a különböző színek fényeinel különböző legyen; de közvetlenebbül is összeköthetjük a fotometriát az általános physikával, ha az intenzitást vesszszük alapmennyiség gyanánt. Sok physikus előtt a fényáram fogalma fölöslegesnek látszott, pedig szükséges, ha azt akarjuk, hogy a fotometria meghatározhassa a Napnak kitett ablakon behatoló fényáramot; a vetítő készülék vagy a világító torony fénynyalábjában levő fényáramot stb.; mint az a jelentéshez csatolt számpéldákból kiviláglik.

---

\* «Sur les unités photométriques» par M. A. BLONDEL. Journal de Physique. 1897, p. 187.



A következő táblázat okszerű, lánczolatos rendben foglalja össze azokat a meghatározásokat, melyeket a fotometriai mennyiségekre javasoltam :

A physikai mennyiség neve.	Meghatározás.	A meghatározás symboluma és egyenlete.
<i>Fénymennyiség</i> , melyet a fénysugarak nyalábja tartalmaz.	A mennyiség arányos (egy bizonyos ismeretlen $k$ együtthatóra nézve) a fénynyaláb által létesített $\varepsilon$ energiával	$Q = k\varepsilon$
<i>Fényáram</i> a nyalábban.	Az a fénymennyiség, mely az időegység alatt a nyalábban áthalad	$\Phi = \frac{Q}{T}$
<i>Megvilágítás</i> a fénynyaláb keresztül metszett felületén.	Az $e$ felületre eső fényáram viszonya annak területéhez	$E = \frac{\Phi}{S}$
<i>Intenzitás</i> vagy egy csekély kiterjedésű (pontiforme) forrásnak fényhatásossága.	Végtelen kis kúpból kiömlő fényáram viszonya a kúp ( $\sigma$ ) szögletéhez (Nem pont kiterjedésű fényforrásnál a hatásosság intenzitásának mondjuk annak a pontalakú forrásnak intenzitását, mely ugyanoly távolságra ugyanazt a megvilágítást hozza létre).	$I = \frac{\Phi}{\sigma}$
Egy fénylő felület belső <i>fényessége</i> adott iránynak megfelelőleg.	E felület végtelen kis elemének fényintenzitási viszonya, a fölvelt $\alpha$ irányban, ez elem $S$ területéhez, merőlegesen vetítve a sugárra	$i = \frac{I}{S \cos \alpha}$
Egy fénylő felület belső <i>sugárzása</i> .	A felület egység által kisugárzott fényáram. Ha megegyezünk abban, hogy nem teszünk különbséget a kisugárzott és felfogott fényáram között, úgy a	



kisugárzás nem más, mint  
 ugyane fényforrás által létesí-  
 tett megvilágítás  $\dots\dots\dots E = \frac{\Phi}{S}$ .

II. *Étalonok.* A fotometriai mennyiségek fiziologiai természetűek lévén, le kell arról mondanunk, hogy azoknak physikai értéket adhassunk és meg kell elégednünk a tapasztalati étalonokkal: így ezek megválasztása logikailag megelőzi az egységek megválasztását.

A fénynek jelenleg használatban levő étalonya két csoportra oszlanak: a láng- és az izzó-étalonokra.

*Láng-étalonok* az úgynevezett gyertyák. Angliában a *Candle*-t manapság a pentannak gázából készült VERNON-HARCOURT-féle étalon képviseli vagy a DIBDIUÉ. Ez utóbbi 10 candle-lal ér fel. A pentan folyadékból való lámpát kevésbbé használják.

Németországban a *Kerze* a törvényes étalon, mely nem más mint a HEFNER-féle amylacétat lámpa.

Franciaországban megmaradtak a *Carcel* lámpa mellett; de ezenkívül használatban vannak: PIGEON gazolin lámpája, petroleum lámpa, HEFNER étalonya és GIROUD gázlángja.

Oly étalonoknak, melyeknél a bél folyadékban ég, meg van az a nagy hibájuk, hogy a bél nagysága folyton változik s épp ezért bajos dolog azt mindig ugyanabban az állapotban tartani.

Jelenleg a két legjobb láng-étalon: a VERNON-HARCOURT-féle pentan és a HEFNER-féle amylacétat; ez utóbbi a legmegbízhatóbb, valóban tökéletes eszköz, csak hogy használata nagy óvatosságot igényel.\*

*Izzó-étalonok.* Ezek elméletileg tökéletesek, de megvalósításuk igen kényes és a gyakorlati követeléseknek eddigelé alig megfelelők. Az izzólámpák és AUER lángja, ámbár igen kényelmesek, a nyomás és a feszültség miatt tökéletes szabályozást igényelnek és idővel tetemes módon változnak. Így legcélszerűbb VIOLElle eljá-

---

\* A Hefner lámpa 40 mm. lángmagasság mellett adja az úgynevezett «Hefner fényt».

rása, a ki izzó-étalonul a platinát használta fel megszilárdulásának pontosan meghatározott hőmérsékleténél. Sajnálhatjuk, hogy használata még nem terjedt el.

Az előbb említett okokat tekintetbe véve helyes lesz, ha egyszerre két nemzetközi étalont fogadunk el: egy *elsőrendű* platina-étalont, főleg a laboratoriumok számára, és egy *másodrendű ideiglenes* étalont főleg a gyakorlati élet számára, mely a Hefner lámpa. Ez utóbbi egyenlő 1·02 vagy 1·06 tizedesgyertyával ( $\frac{1}{20}$  Violle-lal).

III. *Egységek.* Egy meghatározott étalonnál szükségünk van arra, hogy necsak a fény áramának, hanem intenzitásának egységét is fölvegyük alapegységül; tehát physikai egységet épp úgy mint fiziologiait. Ebben kell, hogy együtt legyenek a hosszúság és idő egységei, melyekül gyakorlati szempontból legcélszerűbben a meter és az óra választhatók. Minden más egység azután leszarmaztatható az által, hogy kiindulunk a megvilágítás és az áram egységeiből, melyek az intenzitás egységével a többi egységnek alapját képezik. E három alapegységre használhatunk a holt nyelvekből vett megfelelő neveket, épp úgy mint az általános mérték és súly rendszerünknel. Így minden nyelvben ugyanazok a nevek lennének és pedig egyszerűek és világosak; míg a mostani *gyertya* elnevezés a régi *lábnak* megfelelőleg, a különböző országokban különböző étalont jelentene.

Az ajánlott egységek és meghatározásuk a következő táblázatban foglalvák össze

A mennyiség, melynek megfelel az egység.	A javasolt egységnev.	Az egység meghatározása.
Fényintenzitás.	Pyr.	Az $\frac{1}{20}$ Violle-nyi fényforrás intenzitása.
Megvilágítás.	Lux.	Az 1 pyrnyi pontalakú fényforrás által létesített megvilágítás a sugárra merőlegesen álló felületen.
Aram.	Lumen.	Az 1 luxnyi megvilágítás által az 1 négyzetmeter felületen lé-



		tesített áram ; vagy az 1 pyrnyi forrás által egy egységül fölvelt (állandó) szöglet alatt kibocsá- tott fényáram.
Fényesség.	Pyr négyzet- centimeteren- kint.	A felület egységének ragyo- gása, melyet az intenzitás egy- sége hoz létre.
Fénymennyiség.	Lumen-óra.	Az a fénymennyiség, mely megfelel az időegység alatt fel- használt áramegységnek.

IV. A *fotometriai egységek értelmezése a heterochromás fotometriában*. Ez az egészen új kérdés igen bonyolódott ; részletes tárgyalása az eredeti jelentésben található.

Ez irányban CHARPENTIER, MACÉ DE LÉPINAY, NICATI, CROVANAK vannak szép dolgozatai, melyek nyomán a heterochromás fény összehasonlítása két különböző szempontból történhetik : valamely felület megvilágításának szempontjából (az egyenlő tisztaság módszere) és az egyes részletek percepciójának szempontjából (az egyenlő élességek módszere). Az összehasonlításnak e két eljárása folytán nyert eredmények megegyeznek az isochromás fénynél, de annál inkább különböznek mennél különbözőbb a színképi összetétel.

Hogy az előbbi meghatározásoknak megfelelőleg bizonyos szint-fokozatot állapítsunk meg a fényre alkalmazható mennyiségek és egységek számára, ajánlom, hogy mindenik mennyiséget és mindenik egységet más kettőre válasszunk szét, a mit úgy érünk el, ha az illető értéket az egyik vagy másik precedens alap szerint mérjük.

Minden fényforrásnál kétféle intenzitás létesül : egyik a *fényre* vonatkozó, másik a *látásra* vonatkozó intenzitás, melyeket különböző számjegyek fejeznek ki, és mindenik étalonnak ugyancsak két értéke van.

Csak a platinás alapétalon az, melynek e meghatározásoknál mindkét esetben ugyanaz az értéke van, és épp ezért kell közvetve vagy közvetlenül mind a fény tisztaságának, mind a fény élességé-

nek mértékét erre viszonyítanunk. Szükséges, hogy az összehasonlításnál a mértékek a megvilágításnak és a látás élességének abszolút értékét szigorúan meghatározzák.

BLONDELnek itt vázolt jelentését a genfi kongressuson egy nyolcz tagú bizottság, melynek elnöke HEFNER-ALTENECK volt, vette vizsgálat alá, és azt egészben véve elfogadta. Beható tárgyalás után, melyen az eredeti javaslatban módosításokat tettek és a heterochromás fotometriai vizsgálódásokat elejtették, a bizottság a következő határozatot hozta: \*

1. A nemzetközi fotometriai mennyiségek alapjául egy csekély kiterjedésű fényforrásnak intenzitása szolgál és a következő táblázatban vannak összeállítva:

Mennyiség.	Az egység neve.	A meghatározó egyenlet.
Gyertya.	Fényintenzitás.	$I$ .
Lumen.	Fényáram.	$\Phi = Iw$ .
Lux.	Megvilágítás.	$E = \frac{\Phi}{S}$ .
A négyzetcentimeter-kinti gyertya.	Fényesség.	$e = \frac{I}{S}$ .
Lumen-óra.	Fénymennyiség.	$Q = \Phi T$ .

Itt  $w$  egy testszögletet jelent,  $S$  egy felületet, mely a megvilágításnál négyzetmeternek, a ragyogásnál négyzetcentimeternek felel meg;  $T$  az időt jelenti órákban kifejezve.

2. A fényintenzitás egysége a gyertya.

3. Gyertya gyanánt az ipari szükségleteknek elegendő pontossággal ideiglenesen a HEFNER-lámpa vízszintes fényintenzitása szolgálhat, a szükséges javítások számbavétele mellett.

A bizottságnak e határozatát az összes gyűlés annyiban módosította, hogy a gyertya elnevezés helyett mindenütt a *tizedes gyertya* (bougie décimale) nevet fogadta el és kimondotta: A fényintenzitásnak elméleti egysége a VIOLLE-féle egységnek a huszad-

\* Elektrotechnische Zeitschrift. 1896, p. 533.



része; de mivel ezt gyakorlatilag előállítani nem lehet, ipari czélokra egységül a HEFNER lámpának intenzitása szolgáljon.\*

Mindezeknek a fotometriai mennyiségeknek, melyek valamely világító pont intenzitásán alapszanak, — megvan a maguk gyakorlati fontossága is. A megvilágítás, a felületegységre eső fényáram; a fényesség, a felület egységenként ki- vagy visszacsugárzott fényintenzitás; a lumen-óra, a meghatározott idő alatt felhasznált fény mennyiség, mind oly fogalmak, melyeknek pontos meghatározása elkerülhetetlenül szükséges a fotometriában a különböző munkálatok összehasonlításánál épp úgy, mint egyöntetű eljárás szempontjából. Remélhető, hogy e fotometriai egységek — a tudományos és gyakorlati életben egyaránt — csakhamar meg fognak honosodni.

---

\* Az összen gyűlésen a tárgyalás korántsem folyt le simán. A francziák MASCART párisi tanárral élükön a Violle-féle egységet akarták megtartani, melyet már az 1884-iki konferencia is elfogadott. A németek HEFNER vezetése alatt ez ellen küzdöttek és a »tizedes gyertya» elnevezéssel szemben a »gyertya» egységet akarták érvényre emelni. Hosszabb és heves vita után egy közvetítő indítvány alapján lett a kétféle: elméleti és gyakorlati egység. L. HEFNER jelentését. Elektrotechnische Zeitschrift. 1896, p. 754.

*Szekeres Kálmán.*



## PHYSIKAI LABORATORIUM.

**Ólomforrasztás.** Ólomrészek összeforrasztása csupán ólom segítségével elég nehéz és költséges. BLONDEL a következő egyszerű eljárást ajánlja: Az összeforrasztandó felületek fényesre reszelendők és *ólomamalgámmal* bevonva, összeillesztendők. Most jó forró forrasztó-vassal végig kell menni a forrasztás vonalán: a higany elpárolog s az ólomdarabokat a visszamaradt és oxidálás nélkül megolvadt ólom köti össze.

*La Nature.* 23. évf. 134. l.

**Vezető üveg.** Ismeretes, hogy az elektrosztatikus készülékeket külső elektromos zavaró hatások ellen védőernyővel — fémhálóval vagy ráccsal — kell ellátni, hogy adataik megbízhatók legyenek.

Azonban még eddig kevésbé figyeltek arra, hogy másfajta készülékeknél, a milyenek például az elektromágneses áram- és feszültségmérők, manometerek stb., a készüléket burkoló üveglapnak elektrosztatikus vonzása folytán a mutatóra esetleg szintén könnyen merülnek fel hibás leolvasások. Így például a közönséges feszültségmérőnek beállítását jelentékeny mértékben lehet megváltoztatni, ha csak a tisztító bőrdarabot vagy valamelyes tisztítógyapjút alkalmas irányban ujjunkkal az üveglaphoz dörzsöljük. Ha már most a készülék beállítását különösen kedvező feltételek mellett 50%-kal lehet megváltoztatni, akkor egyáltalában nem lehetünk bizonyosak a felől, hogy — nevezetesen meleg gépházban — valamely készülék előzetes érintés folytán nem ad-e néhány százaléknyi hamis adatot.

A külső elektrosztatikus zavarok elkerülése végett az elektroskópnál eddig az üvegházat dróthálóval vagy cinkbevonattal vették körül. Ezzel azonban az ily készülék átlátszósága és a már némileg nagyobb távolságból való megfigyelése lényegesen megnehezül.

A szerzők tehát az ő elektrosztatikus feszültségmérőiken a mutatót a fémből való skálalap alatt erősítették meg és csak a hegyét tették egy hasadékon át láthatóvá. Hogy azonban elegendő védelmet nyújtson, a hegynek csak igen kicsinynek szabad lennie és így a leolvasás, a mely a hegynél már magában véve kényelmetlenebb mint a tűnél, mely egész hosszával fekete vonalként tűnik fel, nagyobb távolságra mindenesetre nehézkessé válik.

Épen azért AYRTON és MATHER egy teljesen átlátszó és az elektromosságot jól vezető ernyőt próbáltak előállítani. Azt a közel fekvő gondolatot,



hogy két üveglaptól elzárt vezető folyadékot alkalmazzanak, el kellett vetni; mert a folyadék kiszivárgásától és megzavarodásától lehetett tartani; igyekeztek tehát szilárd, az üveglap belső oldalára felvihető, vezető hártát előállítani. Ezüst füsttel, higanyval, amoniaksóval stb. végzett különböző kísérletek nem sikerültek. Azonban olynemű kísérleteik, melyek átlátszó, elektromosságot vezető fénymáz előállítására irányultak, sikert ígérő eredményekre vezettek és hosszabb kísérletek után két módot találtak arra, hogy az üveglapokat a célbavett módon bevonják.

Az eljárás a következő:

1. Oldjunk fel 1 rész tiszta zselatint 4 rész jégecetben, 100°-os vízfürdőben. Tegyük ezen oldathoz egy fél térfogatrész hígított kénsavat (1 rész koncentrált kénsav 8 rész destillált vízben) és vigyük fel a keveréket azon melegen az előzőleg megtisztított üveglapra. Ha a réteg már majdnem szilárd lett, vonjuk be saválló lakkal (Griffith-féle kénsav-álló máz.)

2. A leírt módon készített zselatinoldatot ecetsav hozzáadásával hígítjuk (2 térfogat ecetsav 1 térfogat oldatra) és ezen hígított oldatot hidegen a letisztított tiszta üveglapra öntjük. Felmelegítéssel elgőzölögtetjük a felesleges ecetsavat, az üveget lehűtjük és a ráöntést kétszer ismételjük. Azután a zselatinréteget ætherben hígított saválló lakkal vonjuk be. Az æther melegítéssel távolítjuk el és a hígított lakk felvitelét ismételjük.

Elliot és Paul czégnak ezen eljárással hosszabb tapasztalati próbálgatások után sikerült üveglapokat oly bevonatokkal látni el, melyek teljesen megkeményedtek és eléggé vezetik az elektromosságot és a mellett csak úgy lehet jelenlétüket észrevenni, ha ferdén tekintünk az üveglapra.

Ilyen minden kíváncsnak eleget tevő bevonatok előállítása mindenestre megkövetel bizonyos gyakorlottságot. Az első próbánál a felvitt rétegek vagy felhősek lesznek, vagy igen csekély az elektrosztatikus védőképességük.

Ily fajta védőernyők alkalmazása elektrosztatikus készülékeknél is beválí. Ha például valamely érzékeny lemezes elektroszkop üvegedényének belső része ily bevonattal van ellátva, akkor minden zavaró behatás elmarad. Dörzsölt kaucsukpálczának közelítése az így preparált elektroszkop lemezkéit tényleg semmiféle mozgásba sem hozhatja, ha csak az aranylemezeket tartó fémdrótot föléje helyezett üres fémhengerrel a megosztástól megóvjuk; ha ugyanezen aranylemezeket nem lakkozott üvegedénybe teszszük, akkor a lakkbevonatnak kitűnő védőhatásáról könnyen meggyőződhetünk.

\* L. *The Electrician*. 32. köt. 694. l. 1894.

## A KOMPLEX VÁLTOZÓ GAMMAFÜGGVÉNYÉRŐL.

(Első közlemény.)

A  $\Gamma(x)$  függvény elméletét arra az esetre, midőn  $x$  pozitív értékű, e lapok már az első kötetben tárgyalták.\* E függvény azonban oly esetekben is talál fontos alkalmazást, melyekben  $x$  értéke nincs eme megszorításnak alávetve. Azért kíváncsnak látszott a gammafüggvény oly tárgyalását is összeállítani, mely a független változó minden valós és komplex értékére egyaránt érvényes.

### I. A gammafüggvény elemi értelmezése és szorzat alakja.

1. Legyen  $x$  egy tetszőleges pozitív egész szám és jelöljük  $(x-1)$  szorzatosát  $\Gamma(x)$ -szel. Képletben :

$$\Gamma(x) = (x-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x-1).$$

Ekkor

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad \text{I)}$$

Továbbá

$$\Gamma(x+n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)n(n+1) \dots (n+x-1)$$

és innen

$$\frac{\Gamma(x+n)}{n^x(n-1)!} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{x-1}{n}\right).$$

Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+n)}{n^x(n-1)!} = 1. \quad \text{II)}$$

---

\* KÖNIG GYULA: A gammafüggvények elemi tárgyalása.



E két képlet  $(x-1)$  szorzatosát teljesen jellemzi. Ha ugyanis valamely  $\Gamma(x)$  függvény kielégíti az I) alatti követelést, akkor  $x$  minden pozitív egész számú értékénél:

$$\Gamma(x) = \Gamma(1)(x-1)!$$

Továbbá, hogy a II) követelést is kielégítsük,  $\Gamma(1)$  az egységgel tartozik egyenlőnek lenni.

2. Ezeket tudván,  $\Gamma(x)$  értelmezését következőleg terjesztjük ki  $x$  tetszőleges *valós* és *komplex* értékeire:

*$\Gamma(x)$  jelentse  $x$ -nek oly egyértékű függvényét, mely mindenütt kielégíti az I) és II) alatti képleteket.\**

Lássuk e függvénynek előállítását.

Ha követeléseink egyáltalában megférnek egymással, akkor az elsőnek értelmében

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+1)} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+2)} = \frac{1}{x+1}, \quad \dots,$$

$$\frac{\Gamma(x+n-1)}{\Gamma(x+n)} = \frac{1}{x+n-1},$$

tehát

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+n)} = \frac{1}{x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1)}. \quad 1)$$

Innen továbbá

$$\Gamma(x) \frac{n^x (n-1)!}{\Gamma(x+n)} = \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1)},$$

tehát második követelésünknel fogva

$$\Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1)}. \quad 2)$$

Szóval  $\Gamma(x)$  nem lehet más mint

$$\varphi_n(x) = \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1)} \quad 3)$$

\* Ezen értelmezésre nézve v. ö.: PRYM. Zur Theorie der Gammafunction, Journal für reine u. ang. Mathematik, 82. köt.

limese, ha  $n$  a pozitív egész számokon keresztül minden határon túl növekedik.

Minthogy

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{x}$$

és

$$\frac{\varphi_{m+1}(x)}{\varphi_m(x)} = \left(\frac{m+1}{m}\right)^x \frac{m}{x+m} = \frac{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^x}{1 + \frac{x}{m}},$$

azért  $\varphi_n(x)$  még következőleg is fejezhető ki:

$$\varphi_n(x) = \varphi_1(x) \prod_{m=1}^{n-1} \frac{\varphi_{m+1}(x)}{\varphi_m(x)} = \frac{1}{x} \prod_{m=1}^{n-1} \frac{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^x}{1 + \frac{x}{m}}.$$

Innen

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^x}{1 + \frac{x}{m}}. \quad (4)$$

Ez a végtelen szorzat adja az egyetlen függvényt, mely követeléseinket kielégítheti.

Ámde még kérdéses, hogy e végtelen szorzatnak van-e  $x$  bármely választásánál meghatározott értéke, továbbá hogy az általa ábrázolt függvény valóban kielégíti-e I) és II) alatti követeléseinket.

Gondoljuk egy pillanatra a 4) alatti szorzat összetartását bebizonyítottunk. Akkor második kérdésünkre következőleg válaszolhatunk.

A 3) alatti képlet értelmében

$$\frac{\varphi_n(x+1)}{\varphi_n(x)} = \frac{nx}{n+x},$$

tehát

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x+1)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)} = x,$$

innen pedig

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$



Tehát az I) alatti követelés valóban ki van elégítve.

Most már

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1) = \frac{n^x(n-1)!}{\varphi_n(x)},$$

vagyis

$$\frac{\Gamma(x+n)}{n^x(n-1)!} = \frac{\Gamma(x)}{\varphi_n(x)}$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+n)}{n^x(n-1)!} = 1.$$

Tehát a II) alatti követelés is ki van elégítve.

Ezzel annak vizsgálatát, hogy a  $\Gamma(x)$  értelmezésében foglalt követelések nem tartalmazznak-e ellenmondást, visszavezettük a 4) alatti szorzat összetartásának bebizonyítására.

3. Ha a szorzatban  $x$  a zérussal vagy valamely negatív egész számmal egyenlő, akkor az egyik tényezőnek nevezője eltűnik, tehát ebben az esetben  $\Gamma(x) = \infty$ . Az  $x$  minden más értékére nézve ellenben ki fogjuk mutatni, hogy a vizsgálandó szorzat *feltétlenül összetartó*.

E végből elég lesz bebizonyítanunk, hogy

$$P_N = \prod_{n=N}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^x}{1 + \frac{x}{m}} = \prod_{n=N}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{m}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^x \right\} \quad 5)$$

feltétlenül összetartó. Itt  $N$  egy tetszés szerint választható pozitív egész számot jelent.

Továbbá  $P_N$  helyett szabad a

$$l.P_N = \sum_{m=N}^{\infty} \left\{ xl \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right) - l \cdot \left(1 + \frac{x}{m}\right) \right\} \quad 6)$$

sor összetartását vizsgálunk, hol a jobb oldalon  $l$  a logaritmusnak főértékét jelenti, melynek képzetes része  $\pi i$  és  $-\pi i$  közé esik.

Ha most  $x$  valamely adott értékre vonatkozólag  $N$ -et oly nagy-  
nak választjuk, hogy  $N > |x|$ , akkor sorunk minden egyes tagját

$x$  hatványai szerint kifejezhetjük. Ily módon a következő kétszere-  
sen végtelen sort nyerjük:

$$l \cdot P_N = \sum_{m=N}^{\infty} \left\{ -\frac{x}{m} \left( 1 - l \cdot \left( 1 + \frac{1}{m} \right)^m \right) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left( \frac{x}{m} \right)^k \right\}, \quad 7)$$

és céljainkra elég lesz erről a sorról kimutatnunk, hogy feltétle-  
nül összetartó.

Az  $x$  első hatványát tartalmazó tagokban

$$\begin{aligned} 1 - l \cdot \left( 1 + \frac{1}{m} \right)^m &= 1 - m \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \frac{1}{m^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{m^2} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{m} - \frac{1}{3} \frac{1}{m^2} + \dots \end{aligned}$$

Tehát

$$0 < 1 - l \cdot \left( 1 + \frac{1}{m} \right)^m < \frac{1}{2} \frac{1}{m} < \frac{1}{m}.$$

Ha pedig  $k \geq 2$ , úgy

$$\left| \frac{(-1)^k}{k} \left( \frac{x}{m} \right)^k \right| < \left| \frac{x}{m} \right|^k.$$

E szerint 7) alatt a tagoknak abszolút értéke rendre kisebb

$$S = \sum_{n=N}^{\infty} \left\{ \frac{|x|}{m^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{x}{m} \right|^k \right\}$$

tagjainál.

Itt

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{x}{m} \right|^k \leq \frac{|x|^2}{m^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{x}{N} \right|^k = \frac{|x|^2}{1 - \frac{|x|}{N}} \frac{1}{m^2},$$

tehát

$$S < \left( |x| + \frac{|x|^2}{1 - \frac{|x|}{N}} \right) \sum_{m=N}^{\infty} \frac{1}{m^2}.$$

Ennélfogva  $S$  összetartó és vele együtt a 4)–7) alatti kifejezé-  
sek is feltétlenül összetartók.

4. Eredményeinket következőleg foglalhatjuk össze:

Az I) és II) alatti követelményeknek egy és csakis egy függvény  
tesz eleget.



*E függvény:*

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ \left( 1 + \frac{x}{m} \right)^{-1} \left( 1 + \frac{1}{m} \right)^x \right\}. \quad 8)$$

Ha  $x$  a zérussal vagy valamely negatív egész számmal egyenlő, akkor  $\Gamma(x) = \infty$ . Minden más esetben  $\Gamma(x)$  véges és meghatározott értékű.

Hozzátehetjük:

$$A \quad 0, -1, -2, \dots, -n, \dots$$

helyek kivételével  $\Gamma(x)$  bármely  $x=a$  környezetében hatványsorba fejthető.

Ennek bebizonyításánál jelentse  $a$  a független változónak valamely adott értékét. Továbbá legyen  $N > 2|a|$ . Végre jelöljük az

$$a, a+1, a+2, \dots, a+m, \dots$$

sorozatnak abszolút értékére nézve legkisebb tagját  $(a+K)$ -val. Itt  $K$  okvetlenül kisebb mint  $N$ . Mert ha  $m > N$ , akkor

$$|a+m| = |m - (-a)| > m - |a| \geq N - |a| > |a|;$$

tehát ebben az esetben  $(a+m)$  nem lehet a sorozat legkisebb tagja, hisz nagyobb az első tagnál.

Tegyük fel, hogy  $|a+K| > 0$ ; vagyis azt az esetet, hogy  $a$  a zérussal vagy valamely  $-K$  negatív egész számmal egyenlő, zárjuk ki.

Akkor az  $a$  körül  $R = |a+K|$  sugárral leírt kör belsejében

$$|x-a| < |a+K| \leq |a+m|,$$

hol  $m$  bármely pozitív egész számot vagy a zérust jelentheti. Tehát a rajzolt körön belül

$$\frac{1}{x+m} = \frac{1}{a+m} \frac{1}{1 + \frac{x-a}{a+m}}$$

az  $(x-a)$  hatványai szerint haladó sorba fejthető ki. Továbbá  $N^x$  az egész számsíkban ily alakban állítható elő. Tehát a rajzolt körön belül

$$\varphi_N(x) = \frac{N^x (N-1)!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+N-1)}$$

szintén a mondott alakban fejezhető ki. Ha végre még az 5) alatti  $P_N$  szorzatnak értékét szintén sikerül ily sorba kifejtenuünk, akkor e kifejtés lehetősége a

$$\Gamma(x) = \varphi_N(x) P_N$$

szorzatra vonatkozólag is nyilvánvaló.

A mi most már  $P_N$ -et illeti, úgy vegyük tekintetbe, hogy a 7) alatti sor feltétlenül összetartó, ha csak  $|x| < N$ . Tehát szabad az  $x$  ugyanazon hatványait tartalmazó tagokat összevonni és ily módon  $l \cdot P_N$ -et a kezdőpont körül  $N$  sugárral leírt kör belsejében egy  $x$  hatványai szerint haladó sorba kifejtenuünk.

Továbbá e sorból ismeretes módon levezethetünk egy

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

alakú sort, mely az  $a$  hely körül  $N - |a|$  sugárral leírt kör belsejében mindenütt összetartó és  $l \cdot P_N$ -nel egyenlő. A nyert sorból  $l \cdot P_N$  hatványai számára szintén tudunk  $(x-a)$  hatványai szerint haladó sorokat előállítani. Ha végre ezeket a

$$P_N = e^{l \cdot P_N} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(l \cdot P)^n}{n!}$$

sorba behelyettesítjük és az  $(x-a)$  ugyanazon hatványait tartalmazó tagokat összevonjuk, úgy  $P_N$ -et az  $a$  hely körül  $N - |a|$  sugárral leírt körön belül egy  $(x-a)$  hatványai szerint haladó sorba fejtettük ki.

E sor összetartási köre az  $a$  hely körül  $|a+K|$  sugárral leírt kört teljesen magában foglalja, mert

$$|a+K| \leq |a| < N - |a|.$$

Tehát a  $P_N$  szorzat valóban a kívánt alakban állitható elő, és ennél fogva  $\Gamma(x)$  az  $a$  hely körül  $|a+K|$  sugárral leírt kör belsejében valóban az  $(x-a)$  hatványai szerint haladó sorba fejtető ki.



Abban a kivételes esetben, midőn az  $a$  a zérussal vagy valamely negatív egész számmal egyenlő, ugyanezekkel a megfontolásokkal arra az eredményre jutunk, hogy

$$(x-a) \Gamma(x)$$

az  $a$  hely környezetében az  $(x-a)$  pozitív egész kitevőjű hatványai szerint haladó sorba fejthető ki.

Ismert kifejezésmóddal élve:  $\Gamma(x)$  az  $x$ -nek oly egyértékű analitikai függvénye, mely  $a$

$$0, -1, -2, \dots, -n, \dots$$

egyszerű polusok kivételével minden véges helyen szabályosan viselkedik.

Kürschák József.

## MEGFELELŐ HÁROMSZÖGEK ÉS TETRAÉDEREK POLÁRTEREKBEN.

(Második és befejező közlemény.)

### III. Polár terek meghatározása.

6. A reciprok vonatkozásban álló egyesített  $\sigma$  és  $\sigma_1$  síkok involutorikus helyzetűek, azaz reciprocitásuk polárreciprocitás, ha — a mint ismeretes — egy a  $\sigma$ -hoz sorozott háromszög  $A, B, C$  szögpontjainak a  $\sigma_1$  síkban ugyanezen háromszög azon  $a, b, c$  oldalai felelnek meg, melyek az illető szögpontokkal szemben fekszenek. Az ily háromszöget polárháromszögnek nevezzük.

Ugyane tétel némi módosítása a következő :

A  $\sigma$  és  $\sigma_1$  egyesített reciprok síkok polárreciprok vonatkozásban vannak, ha egy  $S$  pontnak, bármelyik síkhoz sorozzuk, ugyanazon  $s$  egyenes felel meg a másikban és az egyik pl.  $\sigma$  síkhoz sorozott  $s$  pontsor a neki  $\sigma_1$ -ben megfelelő  $S$  sugársorhoz involutorikus helyzetű.

Ha ugyanis a  $\sigma_1$ -hez tartozó  $S$  sugársor egy  $a$  sugarát vesszük annak  $\sigma$ -ban megfelel az  $s$  pontsor egy  $A$  pontja, míg az  $\overline{SA}$  sugárnak az involutorikus helyzetnél fogva  $(sa) \equiv B$  pont felel meg. Mivel pedig  $S$ -nek, ha  $\sigma$ -hoz sorozzuk is, a  $\sigma_1$ -ben  $s$  felel meg, ennél fogva az  $SAB$  háromszög polárháromszög és így az előbbi tétel szerint a  $\sigma$  és  $\sigma_1$  vonatkozása polárreciprocitás.

A  $\sigma$  és  $\sigma_1$  síkok között polárreciprocitás áll fenn akkor is, ha egy  $A$  pontnak, bármelyik síkhoz sorozzam is, a másikban ugyanazon  $a$  egyenes és egy az  $a$ -n kívül eső másik  $B$  pontnak, bármelyik síkhoz sorozzam, ugyanazon  $b$  egyenes felel meg. E tétel áll akkor



is, ha e két pont közül egyik, pl.  $B$  a neki megfelelő  $b$  egyenesre esik.

Ellenben ha  $A$  is,  $B$  is a neki megfelelő  $a$ , illetőleg  $b$  egyenesre esik, úgy csak akkor van polárreciprocitás, ha ki tudunk mutatni még egy az előbbiektől és az  $(ab)$  metszésponttól különböző  $C$  pontot, melynek, bármelyik síkhoz sorozzuk, ugyanazon  $c$  egyenes felel meg a másiktól.

A térbeli polárreciprocitásra nézve ismeretes:

A  $\Sigma$  és  $\Sigma_1$  egyesített reciprok terek polárreciprok vonatkozásban vannak, ha van a  $\Sigma$ -ban oly  $ABCD$  tetraéder, hogy a szögpontjainak  $\Sigma_1$ -ben megfelelő  $a_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$  síkok e tetraéder azon lapjaival esnek össze, melyek az illető csúcsokkal szemben fekszenek. (Polártetraéder.)

E kriterium némi módosítása a következő:

A  $\Sigma$  és  $\Sigma_1$  egyesített reciprok terek polárreciprok vonatkozásban vannak, ha egy  $A$  pontnak bármelyik térhez sorozzuk ugyanazon kívülre eső  $a$  sík felel meg és a  $\Sigma$ -hoz sorozott  $A$  sugárpont a neki  $\Sigma_1$ -ben megfelelő  $a$  sugársíkhöz involutorikus helyzetű.

E kriteriumokra szükségünk lesz a következőkben, hol az előbbi fejezet tételeinek megfordításait akarjuk bebizonyítani.

7. *Ugyanegy síkbeli két perspektív háromszög  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  egy polárrendszer megfelelő idomainak tekinthető* oly módon, hogy az egyik  $A, B, C$  szögpontjainak a másiknak azon  $a_1, b_1, c_1$  oldalai felelnek meg, melyek a homolog szögpontokkal szemben vannak; az ily módon egymásra vonatkoztatott két háromszög teljesen meghatározza a polárreciprocitást.

Az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszögek az egyesített  $\sigma$  és  $\sigma_2$  perspektív síkok megfelelő idomai,  $D$  a perspektív centrum,  $d_1$  a perspektív tengely, tehát:

$$(ABCDd_1 \dots) \overline{\wedge} (A_1B_1C_1Dd_1 \dots)$$

Ha e síkokkal összeeső  $\sigma_1$  síkot veszem és azt  $\sigma_2$ -vel polárreciprok vonatkozásba hozom oly módon, hogy:

$$(A_1B_1C_1Dd_1 \dots) \overline{\wedge} (a_1b_1c_1d_1D \dots),$$

akkor egyszersemind

$$(ABCDd_1 \dots) \overline{\wedge} (a_1b_1c_1d_1D \dots)$$

Vagyis ha a  $\sigma$  és  $\sigma_1$  között reciprocitást állapítok meg úgy, hogy az  $A, B, C, D$  pontoknak az  $a_1, b_1, c_1, d_1$  egyeneseket rendelem megfelelőül, akkor a  $D$  pontnak, bármelyik síkhoz sorozzam, a másiktól  $d_1$  sugár felel meg.

Másrészt a  $\sigma$  sík  $D(ABC \dots)$  sugársora és a  $\sigma_1$  sík megfelelő  $d_1(a_1b_1c_1 \dots)$  pontsora involutorius helyzetűek, mert az  $ABCD$  teljes négyszög szemben első oldalpárjai a  $d_1$  egyenest egy involutio párjaiban metszik: a  $\overline{DA}, \overline{DB}, \overline{DC}$  oldalak által kimetszett pontoknak ez involutióban megfelelnek a  $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$  oldalak által kimetszett pontok, de ez utóbbiak ugyanazok, mint az  $a_1, b_1, c_1$  egyenesek által kimetszett pontok.

Igy tételünk be van bizonyítva arra az esetre, ha a  $D$  pont nem esik a  $d_1$ -re.

Ha a  $D$  pont rá esik  $d_1$ -re, akkor  $\sigma$  és  $\sigma_1$  között megállapíthatunk egy reciprocitást a következő képlet szerint:

$$(ABCA_1 \dots) \overline{\wedge} (a_1b_1c_1a \dots).$$

E reciprocításban az  $A_1 \equiv (b_1c_1)$  pontnak, bármelyik síkhoz számítom, az  $a$  egyenes felel meg. Más oldalról pedig az  $A_1(ABC \dots)$  sugársor a neki megfelelő  $a(a_1b_1c_1 \dots)$  pontsorhoz involutorius helyzetű, mert az  $A_1B_1C_1D$  teljes négyszög három oldalpárja az  $a$  egyenest egy involutio párjaiban metszi, még pedig a  $D$  pontban összejövő három oldal ugyanazon pontokat metszi ki, mint az  $A_1(ABC \dots)$  sugársor három megnevezett sugara, míg a másik három oldal nem egyéb, mint  $a_1, b_1, c_1$ .

8. Ha az  $ABCD$  és  $A_1B_1C_1D_1$  tetraéderek lineáris kapcsolatban vannak, úgy meghatározhatnak egy polárrendszert olyképp, hogy az egyik tetraéder szögpontjainak polárisai a másik tetraéder azon lapjai, melyek a homolog szögpontokkal szemben fekszenek.

Első sorban a hiperbolikus viszony esetére bizonyítjuk be a tételt.

Ki kell mutatnom, hogy azon reciprocitás, mely a  $\Sigma$  és  $\Sigma_1$  terek



között a következő képlet szerint van megadva :

$$(ABCDD_1 \dots) \bar{\wedge} (a_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1 \delta \dots)$$

polárreciprocitás.

E képletből leolvasható, hogy az  $[ABC] \equiv \delta$  síknak a  $\Sigma_1$ -ben  $(a_1 \beta_1 \gamma_1) \equiv D_1$  pont felel meg. Tehát a  $D_1$  pontnak, bármelyik térhez számítsuk, a másokban a  $\delta$  sík felel meg.

Ha még ki tudjuk mutatni, hogy  $\Sigma$ -ba sorozott  $\delta$  pontsík a neki  $\Sigma_1$ -ben megfelelő  $D_1$  síkponthoz involutorius helyzetű, úgy állításunk be van bizonyítva.

Ha a  $\delta$  sík pontjaihoz a vele összeeső  $\delta_2$  sík azon egyeneseit veszem megfelelőül, melyek a  $D_1$  síkpont megfelelő síkjain vannak, úgy feladatunk meg van oldva, mihielyt kimutattuk, hogy ez egyesített  $\delta$  pontsík és  $\delta_2$  sugársík reciprocitása polárreciprocitás.

Ha a  $DD_1 \equiv s$  egyenesnek a  $\delta$  síkon való nyomát  $S$ -sel és a  $\delta_1$  síkkal való metszés pontját  $S_1$ -gyel jelölöm, úgy a  $\delta$  és  $\delta_2$  reciprocitása a következő képlettel jellemezhető ;

$$(ABCS \dots) \bar{\wedge} (a_2 b_2 c_2 s' \dots),$$

a hol természetesen  $a_2, b_2, c_2, s'$  ugyanazt jelentik, mint az első pontban.

Keressük, hogy az  $s'$  egyenesnek, ha  $\delta$ -hoz sorozzuk, mi felel meg a  $\delta_2$ -ben.

Erre nézve vegyük tekintetbe, hogy a  $\delta$  és  $\delta_1$  síkok a  $H$  hiperbolikus másodrendű felület  $p, q, r, s \dots$  alkotósora révén projektív vonatkozásba vannak hozva olyképp, hogy az egyugyanazon alkotón levő pontok felelnek meg egymásnak ; e projektivitásban a két sík közös  $s'$  egyenese önmagának felel meg a nélkül azonban, hogy minden pontja is önmagának felelne meg.

Azaz

$$(ABCSs' \dots) \bar{\wedge} (A_1 B_1 C_1 S_1 s' \dots)$$

Az utóbbi  $\delta_1$  síkot a  $D_1$ -ből, mint centrumból projiciálván a  $\delta$  sorozóra, ebben egy  $\delta_3$  pontsík áll elő, melynek a  $\delta_1$ -re való projektív vonatkozását a következő képlet fejezi ki :

$$(A_1 B_1 C_1 S_1 s' \dots) \bar{\wedge} (A_2 B_2 C_2 Ss' \dots)$$

Végül ha e  $\delta_3$  sikot a  $\delta_2$ -re reciprok vonatkoztatom oly módon, hogy az  $A_2, B_2, C_2, S$  pontoknak megfelelőjéül az  $a_2, b_2, c_2, s'$  egyeneseket veszem, úgy e  $\delta_3$  és  $\delta_2$  sik polárreciprok, mert  $A_2B_2C_2$  egy polárháromszög; tehát minden elempár, nevezetesen az  $S$  és  $s'$  felcserélhetően megfelelő, képletben:

$$(A_2B_2C_2Ss' \dots) \overline{\wedge} (a_2b_2c_2s'S \dots).$$

E három utolsó képletből következik, hogy:

$$(ABCSs' \dots) \overline{\wedge} (a_2b_2c_2s'S \dots).$$

Vagyis a  $\delta$  és  $\delta_2$  közt fennálló reciprocitásban  $S$  pontnak bármelyik síkhoz sorozzam az  $s'$  egyenes felel meg a másikkól.

Még ki kell mutatnom, hogy az egyik pl.  $\delta$  síkhoz sorozott  $S$  sugársor a neki  $\delta_2$ -ben megfelelő  $s'$  pontsorhoz involutorius helyzetű. Vagyis, ha az  $\overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC}, a_2, b_2, c_2$  egyeneseknek  $s'$ -vel való metszéspontjait  $K, L, M, K_1, L_1, M_1$ -gyel jelölöm, be kell bizonyítanunk, hogy  $K$  és  $K_1, L$  és  $L_1, M$  és  $M_1$  egy involutionnak párvai képletben

$$(KLM \dots) \overline{\wedge} (K_1L_1M_1 \dots)$$

Az  $\overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC}$  egyeneseket rendre síkokkal kötvén össze az  $A_1, B_1, C_1$  pontokkal, a  $H$  felület három érintő síkját kapjuk, melyek a felület egy  $S$  pontjából a  $p, q, r$  alkotókat projiciálván, egy vezérvonalban metszik egymást.

E szerint e három sík a  $\delta_1$  sikot három oly egyenesben metszi, melyek egy  $O$  pontban találkoznak.

Az  $OA_1B_1C_1$  teljes négyszög szemben fekvő oldalpárvai az  $s'$  egyenest egy involutio párjaiban metszik, de e párok nem egyebek, mint

$$K \text{ és } K_1, L \text{ és } L_1, M \text{ és } M_1,$$

mert az  $A_1B_1C_1$  háromszög perspektív az  $A_2B_2C_2$  háromszöghöz az  $s'$ -re, mint tengelyre nézve.

E meggondolás azonban értelmét veszti, ha  $S$  rá esik  $s'$ -re, mert ekkor  $K \equiv L \equiv M$ . De ekkor egészen hasonló eljárással, mint az  $S, s'$  párnál, kimutathatom, hogy azon reciprocitásban, melyben az



$A, B, C, S$  pontoknak  $a_2, b_2, c_2, s'$  sugarak felelnek meg, az  $A$  és  $a_2$  felcserélhetőleg felelnek meg egymásnak, azaz a  $\delta$  síkba sorozott  $a_2$  egyenesnek a  $\delta_2$  síkban  $A$  pont felel meg.

Ugyanis ha ismét az  $a_2$ -n keresztülmenő  $a_1$  síkot a  $\delta$  síkhoz a  $H$  felület  $p, q, r, s \dots$  alkotó sora segélyével projektíve vonatkozatom és ugyane síkot az  $A_1$  centrumból a  $\delta$ -ra projiciálom, akkor — a  $p$  egyenesnek  $a_1$  síkkal való metszéspontját  $P$ -vel jelölve — belátjuk a következő képletsor helyességét:

$$(ABCSa_2 \dots) \overline{\wedge} (PB_1C_1D_1a_2 \dots) \overline{\wedge} (AM_1L_1A_2a_2 \dots)$$

Továbbá egy polárreciprocitást állapítván meg úgy, hogy az  $M_1L_1A_2$  polárháromszög legyen és  $A$ -nak feleljen meg  $a_2$ , akkor még:

$$(AM_1L_1A_2a_2 \dots) \overline{\wedge} (a_2b_2c_2s'A \dots)$$

Vagyis egyszersmind

$$(ABCSa_2 \dots) \overline{\wedge} (a_2b_2c_2s'A \dots)$$

Tehát valóban, ha  $a_2$ -t  $\delta$ -hoz sorozom  $\delta_2$ -ből neki megfelel  $A$ . Feltéve, hogy  $A$  nem esik  $a_2$ -re a 6. pontban adott kriterium szerint a  $\delta$  és  $\delta_2$  polárreciprok vonatkozásban vannak.

Ha még  $A$  is rá esnék  $a_2$ -re, úgy még egy elempárra egészen hasonló eljárással bizonyítjuk be a felcserélhetőséget.

Talán nem lesz érdektelen, ha itt közlöm azt az eljárást, melylyel első ízben állapítottam meg a  $\delta$  és  $\delta_2$  síkok polárreciprocitását. A  $H$  felület  $p, q, r, s \dots$  alkotó rendszere a  $\delta$  síkot  $k$  és  $\delta_1$  síkot  $k_1$  görbe pontjaiban metszi, mely másodrendű görbék ez alkotó rendszer révén projektíve vannak egymásra vonatkoztatva, ha az ugyanazon alkotón levő pontokat megfelelőknek vesszük. A két kúpszeletnek az  $s'$  egyenesen levő két valós, vagy konjugált képzetes  $I, J$  közös pontja önmagának felel meg. A  $k$  és  $k_1$  görbékkel a  $\delta$  és  $\delta_1$  síkok is projektív vonatkozásban vannak:

$$(ABCSIJ \dots) \overline{\wedge} (A_1B_1C_1S_1IJ \dots)$$

A  $D_1$  pontból a  $k_1$  görbét a  $\delta$  síkra projiciálván, kapom a  $k_2$  görbét, melyről nyilvánvaló:

$$k \overline{\wedge} k_1 \overline{\wedge} k_2.$$

Tehát

$$(ABCSIJ \dots) \overline{\wedge} (A_2B_2C_2SIJ \dots)$$



A polárrendszerek elméletéből még ismeretes a következő tétel :  
Két háromszög  $ABC$  és  $SIJ$ , melyek egy kúpszeletbe vannak írva, mindig egy polár rendszer két polár háromszögének tekinthető.

Ennélfogva :

$$(ABCSIJ \dots) \overline{\wedge} (abcs'ij \dots)$$

és

$$(A_2B_2C_2SIJ \dots) \overline{\wedge} (a_2b_2c_2s'ij \dots)$$

A három utolsó képletből :

$$(ABCSIJ \dots) \overline{\wedge} (a_2b_2c_2s'ij \dots)$$

A  $\delta$  és  $\delta_2$  reciprocitása tehát valóban polárreciprocitás, mert  $SIJ$  polárháromszög.

Az előbbi bebizonyításban ezen, esetleg képzetes  $I$ ,  $J$  és  $i$ ,  $j$  elemek mellett vannak.

Tehát kimutattuk, hogy ama reciprocitásban, melyet az

$$(ABCD D_1 \dots) \overline{\wedge} (a_1\beta_1\gamma_1\delta_1 \dots)$$

formulával jellemeztünk, van oly  $D_1$  pont, melynek, bármelyik térhez sorozzuk, a másikon ugyanazon  $\delta$  sík felel meg ; más oldalról pedig a  $D_1$  síkpont a neki megfelelő  $\delta$  síkhoz involutorikus helyzetű, tehát valóban polárreciprocitással van dolgunk.

Bebizonyításunkban azonban hallgatagon feltételeztük, hogy  $D_1$  nem esik a  $\delta$  síkra. Ha ily esettel volna dolgunk, akkor  $\delta$  helyett vennők az  $ABCD$  tetraéder azon lapját, mely a másik tetraéder megfelelő szögpontját nem tartalmazza ; ha pedig ilyen nem találkoznék, úgy vesszük az  $A_1B_1C_1D_1$  tetraéder azon lapját, mely ezen  $ABCD$  tetraéder megfelelő szögpontját nem tartalmazza.

Kérdés most már, nem lehetséges-e, hogy mindenik tetraéder mindenik szögpontja a másik tetraéder megfelelő lapjába esik a mellett, hogy  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$  egy hiperbolikus sugársorba tartozik ?

Tegyük, hogy lehetséges. Akkor a  $\delta$  sík tartalmazza  $s'$ -t és a  $H'$  hiperboloid egy  $z'$  vezér vonalát, melyet a  $p'$ ,  $q'$ ,  $r'$  három oly pontban metsz, melyek egymástól és az  $s'$ -ön levő ponttól különböznek.

De a  $p'$ ,  $q'$ ,  $r'$  nyomai a  $\delta$  síkon ez esetben nem egyebek, mint az  $ABCD_1$  teljes négyszög diagonál pontjai. Ugyanis pl. a  $\gamma$  síknak nyomvonala  $\overline{AB}$ , a  $\gamma_1$ -nek nyoma pedig  $\overline{CD}_1$ , metszéspontjuk



az  $r'$ -nek nyompontja stb. Ámde valamely teljes négyszög három diagonálpontja nem feketik egy egyenesen.

Tehát ha a két tetraéder hiperbolikus viszonyban van egymással, akkor nem lehet, hogy mindenik lap a másik tetraéder megfelelő szögpontját tartalmazza. Így a nullsystema megfelelő tetraéderei nem lehetnek hiperbolikus viszonyban.

9. Kétszögös viszony esetében egészen analog eljárással bizonyítjuk be a tételt.

Ekkor is reciprocitást állapítunk meg a következő képlet szerint:

$$(ABCDD_1 \dots) \overline{\wedge} (\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1 \delta \dots)$$

A  $D_1$  pontnak, bármelyik térhez sorozzam, a  $\delta$  sík felel meg.

A  $D_1$  síkpont és  $\delta$  pontsík involutorius helyzetű, azaz a  $D_1$ -től a  $\delta$  sorozójából kimetszett  $\delta_2$  sugársík a  $\delta$  pontsikkal polárreciprok vonatkozásban áll.

A  $\delta$  és  $\delta_2$  reciprocitása a következő formulában van adva:

$$(ABCS \dots) \overline{\wedge} (a_2 b_2 c_2 s' \dots)$$

Kérdés, ha  $s'$ -t a  $\delta$ -hoz sorozom, mi felel meg neki a  $\delta_2$ -ből. Ennek eldöntésére a  $\delta$  és  $\delta_1$  síkot projektíve vonatkoztatom egymásra úgy, hogy az  $A, B, C, S$  pontoknak az  $A_1, B_1, C_1, S_1$  pontokat rendelem megfelelőül. Akkor az  $\overline{AB}$  és  $\overline{CS}$  egyenesek  $F$  metszéspontjának megfelel  $\overline{A_1 B_1}$  és  $\overline{C_1 S_1}$  metszéspontja  $F_1$ . Tehát  $ABF \dots$  pontsor perspektív  $ABF_1 \dots$  pontsorhoz a  $T$  centrumra nézve, ennél fogva  $U'$  közös pontjuk önmagának felel meg. És hasonlóképen  $CFS \dots$  pontsor perspektív a  $C_1 F_1 S_1 \dots$  pontsorhoz az  $U$  centrumra nézve, közös pontjuk  $V$  szintén önmagának felel meg, azaz

$$(ABCSs' \dots) \overline{\wedge} (A_1 B_1 C_1 S_1 s' \dots).$$

Az utóbbi  $\delta_1$  síkot a  $D_1$ -ből a  $\delta$ -ra projiciálván, kapom, hogy:

$$(A_1 B_1 C_1 S_1 s' \dots) \overline{\wedge} (A_2 B_2 C_2 Ss' \dots).$$

Végre ha az  $A_2, B_2, C_2, S$  pontokhoz az  $a_2, b_2, c_2, s'$  egyeneseket veszem megfelelőül, akkor egy polárreciprocitást állapítottam meg, melyre nézve:

$$(A_2 B_2 C_2 Ss' \dots) \overline{\wedge} (a_2 b_2 c_2 s' S \dots).$$

Lesz tehát

$$(ABCSs'...) \wedge (a_2b_2c_2s'S...).$$

A  $\delta$ -hoz tartozó  $\overline{SC}$ -nek megfelelően a  $\delta_2$ -ben ( $s'c_2$ ), azaz  $U'$  pont és ( $cs'$ ), azaz  $U'$  pontnak a  $\overline{C_2S}$  egyenes, mely  $\overline{CS}$ -sel azonos, látjuk hogy az  $SVU'$  egy polárháromszög, tehát a  $\delta$  és  $\delta_2$  sík reciprocitása valóban polárreciprocitás.

Az előfordulható különös esetek átgondolását a szives olvasóra bízván, áttérünk a perspektív viszony esetére.

10. A perspektív viszony esetében nevezzük a perspektív centrumot  $K$ -nak és a síkot, melyben a megfelelő lapok metszik egymást  $x$ -nak és állapítsunk meg egy reciprocitást oly módon, hogy

$$(ABCDK...) \overline{\wedge} (a_1\beta_1\gamma_1\delta_1x...).$$

E reciprocításban  $K$  és  $x$  felcserélhetőleg felelnek meg egymásnak, mert a perspektív helyzetnél fogva :

$$(ABCDKx...) \overline{\wedge} (A_1B_1C_1D_1Kx...);$$

továbbá az  $A_1B_1C_1D_1$  tetraédert polártetraédernek és  $K$ ,  $x$ -t egy elempárnak véve lesz :

$$(A_1B_1C_1D_1Kx...) \overline{\wedge} (a_1\beta_1\gamma_1\delta_1xK...),$$

tehát egyszersmind

$$(ABCDKx...) \overline{\wedge} (a_1\beta_1\gamma_1\delta_1xK...)$$

Azonfelül a  $K$  sugárpont involutorius helyzetű a  $x$  sugársíkhoz. Mert pl. az  $\overline{aa_1}$  egyenest az egyik térhez sorozván neki, mint  $\overline{ax}$ -nak megfelel  $\overline{A_1K}$  sugár, míg, ha a másik térhez sorozom, neki, mint  $\overline{a_1x}$ -nak megfelel  $\overline{AK}$  sugár, de ez utóbbi az előbbi  $\overline{A_1K}$ -val azonos.

Minthogy ezen felcserélhetőséget négy sugárpárra ki tudjuk mutatni: állításunk be van bizonyítva.

### Magyarázat az ábrákhoz.

1. ábra.

A projectio-centrum határozatlan. Önkényesen vettem fel az  $A, B, C, A_1, B_1, C_1$  pontoknak és e két  $\delta$  és  $\delta_1$  sík  $s'$  metszészvonalának projec-



tióját. A föllépő egyeneseket és síkokat a  $\delta$  és  $\delta_1$  síkon való nyomaikkal határozzuk meg. A  $D$  és  $D_1$  pontok projectiója már nem vehető föl önkényesen, mert a  $\overline{DD_1}$  azaz  $s$  egyenes azon hiperbolikus sugársorba tartozik, melybe az  $\overline{AA_1}$ ,  $\overline{BB_1}$ ,  $\overline{CC_1}$ , azaz  $p$ ,  $q$ ,  $r$  egyenesek. E sugársor egy sugarának megszerkesztése céljából meghatározom az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  pontokon átmenő vezérvonalakat az  $\overline{A1}$ ,  $\overline{B2}$ ,  $\overline{C3}$  egyeneseket, melyek rendre metszései  $[BB_1A]$  és  $[CC_1A]$ ,  $[AA_1B]$  és  $[CC_1B]$ ,  $[AA_1C]$  és  $[BB_1C]$  síkpároknak. Azután az  $\overline{A1}$  egyenesen át tettem az  $[AK1]$  síkot, ez metszi a  $\overline{B2}$  és  $\overline{C3}$  egyeneseket egy-egy pontban, az ezeket összekötő  $\overline{SS_1}$  egyenes legyen az  $s$  alkotó, melyen tetszőlegesen veszem föl a  $D_1$  pontot. A  $D$ -re levezetéseinkben nem volt szükség. A  $C_2$  meghatározására az  $[SS_1C_1]$  síknak a  $\delta$  síkon való nyomát határozom meg, ez kimetszi  $C_1D_1$ -ből a  $C_2$  pontot. A  $B_2$  és  $A_2$  ezután már egyszerűen szerkeszthető oly módon, hogy a  $[B_1C_1D_1]$  ill.  $[A_1D_1C_1]$  síkok nyomait keressük a  $\delta$  síkon és azokkal metszük a  $\overline{B_1D_1}$  ill.  $\overline{A_1D_1}$  egyeneseket.

2. ábra.

A projectio-centrum itt is határozatlan. Felveszszük a  $\tau$  sík  $A$ ,  $A_1$ ,  $B$ ,  $B_1$  pontját önkényesen, az  $\overline{AA_1}$  és  $\overline{BB_1}$ , azaz  $p$  és  $q$  egyenesek metszése a  $T$  pont. Önkényesen vesszük föl tovább az  $v$  sík  $C$ ,  $C_1$ ,  $D$ ,  $D_1$  pontjainak képeit, a  $\overline{CC_1}$  és  $\overline{DD_1}$ , azaz  $r$ ,  $s$  egyenesek metszése  $U$  pont. A  $TU$  egyenes a  $\tau$  és  $v$  síkok metszés vonalával azonos.

Az  $X'$  pont a  $p'$  egyenesnek nyoma a  $\tau$  síkon, melyet megkapunk, ha a  $[BCD]$  és  $[B_1C_1D_1]$  síkoknak a  $\tau$  síkon való nyomait metszéshez hozunk. Hasonlóképen az  $Y'$  pontot az  $[ACD]$  és  $[A_1C_1D_1]$  síkoknak a  $\tau$  síkon levő nyomaiból.

A  $\delta$  sík nyoma a  $\tau$  síkon  $\overline{AB}$ , az  $v$  síkon  $\overline{CF}$ , az utóbbin van  $C_2$  pont. A  $B_2$  és  $A_2$  pontok meghatározására, keresem a  $[BB_1D_1]$  ill.  $[AA_1D_1]$  síkoknak metszését a  $\delta$  síkkal, ezen egyenesek kimetszik a  $\overline{D_1B_1}$  ill.  $\overline{D_1A_1}$  élekből a  $B_2$  ill.  $A_2$  pontokat. A  $\delta$  és  $\delta_1$  síkok metszésvonala az  $\overline{U'V}$  egyenes.

*Skopál István.*

## ELEMI TÉTEL AZ EGÉSZ SZÁMOK FELBONTÁSÁRÓL.

Az elemi számtanban a számrendszerek tárgyalásakor rendszeresen felemlítik azt a tételt, hogy minden szám a 2-es szám különböző hatványainak összegeként fejezhető ki, a mi egyszerűen annak következménye, hogy minden szám felírható a kettős számrendszerben :

$$k = \varepsilon_0 2^m + \varepsilon_1 2^{m-1} + \dots + \varepsilon_m,$$

a hol minden  $\varepsilon$  2-nél kisebb nem negatív szám, tehát vagy zérus vagy egy.

Ha a tételt így fogalmazzuk: minden szám egy- és csak egyféleképpen állítható elő 2 hatványaiból csupa különböző tagú összegként, akkor tulajdonképpen számosztási tételt kaptunk, mely a partitio numerorum elméletének segédeszközeivel is igen egyszerűen bebizonyítható, a mint azt már EULER meg is tette «*Introductio in Analysin infinitorum*» című művében (Cap. 16. De partitione numerorum).

Ugyanott EULER még egy, ezzel rokon, érdekes tételt bizonyított be; azt ugyanis, hogy minden szám egy- és csak egyféleképpen állítható elő a hármas számnak hatványaiból csupa különböző hatványok összeadása és kivonása által; ez a tétel is igen egyszerűen igazolható egészen elemi úton s még pontosabban is meghatározható,\* az előbbivel együtt tehát felemlíthető az elemekben, minthogy érdekességénél fogva azt mindenesetre megérdemli.

A bebizonyítás a következő :

---

\* Erre az érdekes apróságra KÖNIG GYULA műegyetemi tanár úr figyelemzett a műegyetemen tartott matematikai gyakorlatain.  
Z. G.



Írjuk fel a tetszőleges  $k$  számot a hármas számrendszerben :

$$k = a_0 3^m + a_1 3^{m-1} + \dots + a_{i-1} 3^{m-i+1} + a_i 3^{m-i} + \dots + a_m,$$

a hol bármely  $a$  a 0, 1, 2 számok egyike. Kimutatjuk, hogy  $k$  oly alakban írható (esetleg úgy, hogy 3  $m$ -nél magasabb hatványait is bevezesszük az előállításba), melyben az együtthatók 1, 0 vagy  $-1$ . Ezzel tételünk be lesz bizonyítva :

Legyen  $k$  fentebbi kifejezésében jobbról kezdve az első  $a$ , a mely 2 az  $a_i$ , akkor

$$a_i = 3 - 1$$

és minthogy

$$a_i 3^{m-i} = 3^{m-i+1} - 3^{m-i}$$

$k$  így írható :

$$k = a_0 3^m + \dots + (a_{i-1} + 1) 3^{m-i+1} - 3^{m-i} + \dots + a_m.$$

Így minden egynél nagyobb együtthatótól megszabadulhatunk, akként, hogy helyébe  $-1$ -t teszünk és a háromnak egygyel magasabb hatványának együtthatóját egygyel növesztjük ; így eljuthatunk egész  $3^m$ -ig ; ha ennek együtthatója 2, ezt innen is kiküszöbölhetjük az által, hogy  $2 \cdot 3^m$  helyébe  $3^{m+1} - 3^m$  írunk ;  $k$  tehát mindig ily alakban írható :

$$k = 3^{m+1} \pm 3^m \pm 3^{m-1} \pm \dots \pm 3 \pm 1.$$

Ezzel az idézett tételnél többet bizonyítottunk be, mert azt is látjuk, hogy az előállításban előforduló legmagasabb hatványa a 3-nak legfeljebb  $3^{m+1}$ , tehát 3-nak a  $k$ -hoz legközelebb álló  $k$ -t felülmúló hatványa ; minthogy továbbá a használt eljárás természeténél fogva ez csak egy eredményre vezethet, a tételt így mondhatjuk ki :

*Minden szám egy és csak egyféleképpen állítható elő 3 különböző hatványaiból összeadás és kivonás útján, még pedig úgy, hogy 3 legmagasabb hatványa, mely az előállításban előfordulhat, 3-nak  $k$ -t a számsorban követő hatványa.*

Mindkét idézett tétel gyakorlatilag is értékesíthető ; az első értelmében oly súlyokkal, a melyek a súlyegységnek, 1, 2, 4, 8, 16, ...-szorosai bármely terhet súlyegységnyi pontossággal meg-

mérhetünk a mérlegnek csupán egyik csészéjére rakva súlyokat; de ha a súlyokat mindkét csészére rakjuk ez utóbbi tétel szerint, sokkal kevesebb súlylyal, a súlyegység 1, 3, 9, 27, 81, . . . szorosai-val is beérhetjük. Tehát a mérlegelésnél sokkal kevesebb súlylyal czélt érhetünk, mint a hány a közönséges súlyegységnyi pontossággal való méréséknél rendesen használatos.

Minthogy így e tételnek némi gyakorlati fontossága is van, annyival inkább érdemes arra, hogy az elemekben megemlíttessék.

*Zemplén Győző.*



## A PÁRÁK SZEREPE A KOHERER-JELENSÉGEKNÉL.

A párák szerepét a koherer-jelenségeknél már észleltem akkor, mikor kimutattam, hogy a hőmérsékletváltozás az ellenállásában megkisebbedett koherer ellenállását abban az értelemben változtatja meg, mint a megrázás, vagy a hanghullám. Már akkor észleltem azt a befolyást, melyet a párák a két kötötűből álló kohererre gyakorolnak. Ha ugyanis a két kötötűt oly közel hoztam egymáshoz, hogy köztük a távolság körülbelül  $0.1\text{ mm}$  volt, e koherer az elektromos hullámokra nem reagált; ha azonban a két kötötűre reáleheltem, hogy a vízpára a két kötötűt áthidalja, az elektromos hullámokra azonnal reagált. Mert míg a párák képződésekor a galvanométer tűje alig 4 skálarészt futott be, addig a szikrák hatása alatt 40 skálarészt tett meg. Ezután pedig a készülék úgy működött, mint a legjobb koherer és ha később felmondta a szolgálatot, újabb reálehelés elegendő volt arra, hogy a kísérlet sikerüljön.

Ugyanezt a jelenséget tapasztaltam két megmágnesezett kötötű végei közt tartott vasreszeléken is. Ha a két kötötűt annyira eltávolítottam egymástól, hogy az összekötő hid hosszú és nagyon vékony volt, e koherer szintén nem reagált az elektromos szikrákra; mihelyt azonban reáleheltem a reszelékre, a galvanométer tűje azonnal kitért néhány skálarészre és az elektromos hullám keltésekor a koherer ellenállása rendesen megkisebbedett és úgy viselkedett ezután, mint a rendes koherer.

Ha az így működésre alkalmassá tett kohererre reáleheltem, de csak egyszer, akkor, mikor az elektromos szikra már ellenállásában megkisebbitette, a galvanométer tűje azonnal a  $0^\circ$ -ra tért, de ismét visszacsapott eredeti állásába. E jelenséget a hőmérsékletváltozás idézte elő; mert, ha a reálehelés tovább tartott, a

tű már nem tért ki a vízpárák elektromos vezetőképessége miatt. Később higanycseppet és kötőtűket hoztam oly közel egymáshoz, hogy az elektromos hullám a galvanométer tűjét az ellenállás kisebbitésével még nem térítette ki; ha ekkor a cseppre és a kötőtűkre leheltem, a tű néhány skálárészre kitért, az ezután keltett elektromos hullám pedig a tűt egészen kitérítette; ez is ezután úgy működött, mint az előbb leírt készülék.

Mivel az effajta készülékek beállítása fáradságos és hosszadalmas, megnedvesített üveglemezre staniol lemezt húztam és 4—5 helyen vékony késsel, párvonalosan átmetszettem a staniol-lemezt. Erre tettem azután az árammal összekötött kötőtűket, a metszési iránynyal párvonalosan. A nyílásokra való leheléskor a galvanométer tűje 4 skálárészt futott be, az ezután ébresztett elektromos hullám e koherer ellenállását annyira megkisebbitette, hogy a tű 40 skálárészt tett meg. A legkisebb hőmérsékletváltozás, vagy a legkisebb mozgás már elegendő volt arra, hogy az ellenállás megnagyobbodjék, a tű  $0^{\circ}$ -ra térjen; de a legkisebb szikra még 30 m távolságból is újból kitérítette.

Ha azonban véletlenül a staniol-lemezeken szélesebb nyílást metszettem, a reálehelés után keltett elektromos hullámok hol megnagyobbították az ellenállását, hol megkisebbitették; egyszer a galvanométer tűje a szikrára kitért 40 skálárészre és ott maradt, de már a következő szikra meg a  $0^{\circ}$ -ra térítette vissza a galvanométer tűjét; ez így tarthat, váltakozva, 10—20 szikra adásáig. Hogy a szikrának csak ellenállásnagyoobbító hatását észleljem, a két kötőtűt két, többszörösen átmetszett, staniolos üveglemez közé tettem és ezután leheltem a nyílás közé. A lehelés után a galvanométer tűje azonnal 40 skálárészre tért ki; de az ezután keltett elektromos szikrák e készülék ellenállását már csak megnagyobbították, mert a tű a szikrakeltéskor azonnal a  $0^{\circ}$ -ra tért, de önmagától ismét elfoglalta eredeti állását. Ezt az eredményt el tudtam érni a higanycseppel is; de a készülék érzékennyé tétele igen fáradszó.

Egy lehelet hatása alatt majdnem egy óráig el lehet kísérletezni, és körülbelöl 120 szikrára tud a készülék egymásután,



következésetesen, biztosan reagálni; minden egyes szikra a  $0^\circ$ -ra téríti a tűt, de azonnal vissza is megy a tű a 40-ik skálarészre. Nagy előnye e készüléknek az elektromos hullámok tanulmányozásánál az is, hogy minél távolabbról jó az elektromos hullám, a tű arányosan kisebb-kisebb kitéréseket jelez; e mellett nem kell az egyes szikrák után únos-untalan rázogatóni, mert önmagától visszatér elfoglalt helyére. Egy ilyen berendezéssel 4 nap egymásután tettem kísérletet; egyszer sem mondta fel a szolgálatot.

A különböző gázoknak befolyását effajta rendszerre most tanulmányozom; e rövid közleménynyel csak azt jelezem, a mit már régen elértem s több kollegámnak be is mutattam.

Foglalkozik ilyes kísérletezéssel ALBERT NEUGSCHWENDER is.\* De az ő készüléke és az enyém közt lényeges különbség van nem csak berendezésben, hanem főleg a működésben. Az ő készüléke, ha a pára az eszköz ellenállását megkisebbitette, nem reagál még a legerősebb mechanikai rázásra sem, még kevésbbé a legerősebb hanghullámokra. Az én berendezésem és eszközöm e hatások iránt is végtelen érzékeny; elegendő a felső üveglemezt gyengén megérinteni, a tű már is a  $0^\circ$ -ra tér, de ismét elfoglalja eredeti állását. Érzékeny a hőmérséklet változása iránt is.

Hogy a gyorsan egymásután jövő elektromos hullámokat is mily szépen jelzi, mutatja már az is, hogy ha egy elem és egy orvosi czélokra szolgáló kis induktor szolgáltatva indított áramot a földbe levezetem, és a galvanométer és a normális elem helyett a gáz- és vízvezeték csapjait kapcsolom be egy telefonnal az eddigi berendezésű készülékbe, a telefonban az induktor zörejét egészen tisztán kivettem akkor, a mikor a készülékre reáleheltem; pedig e gáz és vízvezetéki hálózat a földbe vezetett elektródoktól 20 m távolságban van.

Megjegyzem még, hogy az itt jelzett kísérletezéshez rendesen egy RAOULT-féle normális elemet, egy DEPREZ D'ARSONVAL-féle galvanométert és 10200  $\Omega$  ellenállást használtam, a leolvasás objective történt.

*Károly Irén.*

\* A. Neugschwender, Wied. Ann. 67. sz. 430. 1899.



## TELEGRAFÁLÁS ELEKTROMOS IVFÉNYNYEL.

A MARCONI-féle drót nélküli telegrafálás minden érdekessége s jelentősége mellett a gyakorlati alkalmazásban sok kívánni valót hagy. Nagyobb távolságokra ez időszerint még nem alkalmazható, azonkívül alig lehet a minden irányban szétterjedő elektromos hullámok felfogását avatatlanok elől megóvni, s így a távjelzés titkát megőrizni. Kisebb távolságokra ugyan lehet az elektromos hullámokat egy meghatározott irányba terelni, ha a jeladó oscillatort egy vájt fémtükör fókuszába helyezzük, azonkívül némileg sikerül a jeladás titkát is megőrizni, ha az elektromos hullámokat felfogó koherert az oscillatorral teljesen összeegyeztetett resonator szárnyakkal látjuk el. — De ily módon a jeleket alig továbbíthatjuk 50—100 m. távolságnál tovább.

Több kmnyi távolságban az elektromos hullámok felfogására már nem elegendők a resonator szárnyak. E végből szükséges, hogy a koherert hosszú légvezetőkkel lássuk el, de ez egyrészt kizárja az elektromos hullámoknak meghatározott irányba való terelését, másrészt meg ez ideig még nem sikerült a légvezetéseket úgy módosítani, hogy azok csakis meghatározott hosszúságu elektromos hullámok felfogására legyenek képesek s ez által alkalmasak arra, hogy a távjelzés avatatlan kezeztől elidegeníthető ne legyen.

A fénysugár az elektromos hullámoknál még mindig nagyobb távolságra irányítható. Az Elektricitäts A. G. (azelőtt SCHUCKERT & Co., NÜRNBERG) a chicagói világkiállításon oly hatalmas reflectort állított ki, melynek fényerőssége mintegy 194,000,000 norm. gyertya egységet ért el s fényhatása 128 kmnyi távolságban még



érezhető volt. (E. T. Z. XIV. 681. 1893). E körülmény által indítatva jutott arra a gondolatra ZICKLER KÁROLY, brünni tanár, hogy a telegraf jeleknek vezető drót nélkül való áttételére az elektromos hullámok helyett a fénysugarakat használja fel, természetesen oly módon, hogy a jeleket avatatlanok magán a fénynyaláb változásán még éjjel sem olvashatják le s így a távjelzés titka teljesen épségben marad. ZICKLER ezen telegrafia berendezésénél az ultraibolya sugaraknak azon tulajdonságát használta fel, hogy azok hatása alatt az elektromos töltések kisülnek. Az ultraibolya sugaraknak ezen hatását először (1887) HERTZ vette észre s feltételeit behatóbban E. WIEDEMANN és H. EBERT\* tanulmányozták. Ha ugyanis valamely inductor vagy HOLTZ-gép elektródjainak egymástóli távolságát annyira növeljük, hogy közöttük az elektromos szikra már át nem üt, akkor azonnal fellép újra a szikrák kiváltása, mihelyt ultraibolya sugarak érik az elektródok közét.

A jeladó állomásról erős elektromos fényív segítségével a MORSE-féle jeleknek megfelelő időközökben ultraibolya fénynyalábot irányít a jelfogó állomásra, melyek aztán ott hasonló időközökben kis elektromos szikrákat váltanak ki.

Az így áttett jelek, vagy egy koherer révén, vagy közvetlenül elektromos esengettyű, illetőleg telefon bekapcsolása által MORSE-jelekké alakíthatók át. ZICKLER-nek ezen a fény elektromos hatásán alapuló telegráf berendezése a következő:

A jeladó állomáson fényforrásul erős elektromos ivlámpa szolgál, a mely vízszintes és függélyes síkban forgatható tokban ( $T$ ) van elhelyezve, úgy hogy a tok nyílásán ( $M$ ) kilépő sugárnyaláb tetszés szerinti irányban a jelvevő állomás felé irányítható. Az ivfény kézzel vagy alkalmas mechanizmussal úgy szabályozható, hogy az állandó helyen marad. A fénysugaraknak párhuzamossá tételére s így a fényhatás erősítésére a tok hátulján elhelyezett vajtűkör ( $V$ ) s a tok nyílásába ( $M$ ) foglalt gyűjtőlencse ( $B$ ) szolgál.

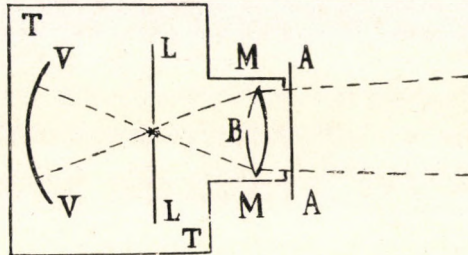
A gyűjtő lencsének természetesen olyan anyagból kell állania,

---

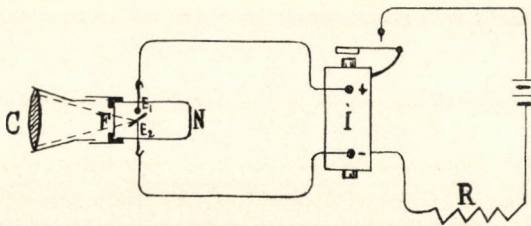
\* Wied. Ann. 33 k. 241 l.

mely az ultraibolya sugarakat akadálytalanul bocsátja keresztül. Ezen követelménynek legjobban felel meg a kvarckristály.

Az  $M$  nyíláson kilépő párhuzamos fénynyaláb a tok megfelelő beállításával a jelfogó állomásra irányítható. A nyílás előtt egy vagy több üveglemezből álló zárószerkezet ( $A$ ) van alkalmazva,



mely a fényképező készülékek zárószerkezete módjára pneumatikus uton gyorsan zárható és nyitható. Az üveglemezzár a látható fénysugarakat akadálytalanul keresztül bocsátja, ellenben az ultraibolya sugarakat visszatartja, s így a fénynek elektromos



hatása a jelfogó állomáson megszűnik, s csakis akkor hat, ha a nyílás elől az üveglemezzár el van távolítva.

A zárószerkezetnek rövidebb s hosszabb ideig tartó nyitása által a MORSE-féle pont és vonal jeleknek megfelelő rövidebb hosszabb ideig ható ultraibolya fénynyalábot küldhetünk a jelfogó készülékhez.



Minthogy csakis a láthatatlan ultraibolya sugarak fogatnak fel, a látható fénysugarak pedig továbbra is akadálytalanul haladnak ki a reflektorból, annak fényváltoztatása a szem által fel nem ismerhető s így az adott jelek az avatatlan megfigyelő előtt rejtve maradnak.

A jelfogó készülék áll egy hengeres üvegedényéből ( $N$ ), mely elől légmentesen planparallel kvarc-lemezkével ( $F$ ) van elzárva s ritkított levegővel vagy más ritkított gázzal megtöltve. Az üvegedényke két szemközti oldalára egy-egy ( $E_1$ ,  $E_2$ ) platin elektrod van beforrasztva, melynek egyike (anod) néhány mm. átmérőjű kis golyócskában, a másik (kathod) pedig kis kör alakú lemezkében végződik, melynek síkja a kvarclemez felé fordul.

Az elektródok, melyek mintegy 10 mm.-nyire vannak egymástól, platinával vannak bevonva. Az üvegedény kvarclemezes végére kis fémcső van erősítve, melybe egy ki és betolható másik kvarcslencsével ( $G$ ) ellátott cső illik, melynek segítségével a jeladó állomásról érkező fénynyaláb úgy egyesíthető, hogy a keletkezett fénykúp csúcsa a kathod ( $E_2$ ) korongjára essék.

Az elektródok egy kis induktor ( $I$ ) sekundär-tekercsével úgy köttetnek össze, hogy az  $E_1$  (a gömbös) az anod, az  $E_2$  (a korongos) pedig a kathod legyen, azonkívül a primär tekercs árama alkalmas ellenállás ( $R$ ) beiktatásával úgy szabályozandó, hogy az induktor szikratávolsága ne legyen nagyobb 1—2 cm.-nél, azaz, az elektródok között a feszültség annyira emelendő, hogy a szikra már át ne üssön. Mihelyt a fényforrás üveglemezes zárja utat enged a fényiv ultraibolya sugarainak, azok a jelfogó kathodjára esnek és fényelektromos hatásuk folytán az elektromos szikrát azonnal létrehozzák, de a szikra rögtön megszűnik, mihelyt az üveglemez a hatékony sugarak útját állja. Ily módon tehát a jeladó állomásról a jelfogóban a szikra áramkőre a Morse-jelnek megfelelő rövidebb és hosszabb időközökben megindítható, illetőleg megszakítható.

A fellépő kis szikrák a jelfogó környékén gyenge elektromos hullámokat ébresztenek, melyek aztán egy érzékeny kohererre hatva a Marconi-féle berendezéssel az áttett jeleket vagy elek-



tromos csengettyű vagy Morse-féle írógép által érzékitik. A jelek érzékitésére a koherer helyett lehet az induktor sekundär áramkörébe közvetlenül alkalmas relaist kapcsolni, vagy ha a jeleket csupán csak hallhatóvá akarjuk tenni, elégséges a szikra áramkörébe egyszerűen telefont iktatni. Természetesen szükséges, hogy a telefon tekercseinek szigetelése az induktor áramának feszültségére nézve megfelelő legyen. Már egy közönséges telefon a jeleket körülbelül egy méternyi távolságra hallhatóvá teszi, erősebben hangzó telefonnal pedig jókora tér minden részében hallhatóvá tehetjük.

ZICKLER laboratóriumában végzett nagyszámú kísérleteit kezdetben csak kisebb távolsággal — 2 méterrel — kezdte s főleg a jellevő készüléknek előbb leírt módon való berendezésével sikerült a távolságot mintegy 200 méterig növelnie. Arra az eredményre jutott ugyanis, hogy bizonyos fokig való légritkított térben a szikrák kiváltása tökéletesen megyen végbe, de különösen akkor, ha az ultraibolya sugarak kvarclencsével összegyűjtve a kathodra tereltetnek.

Vizsgálatait később Nürnbergben folytatta egy Schuckert-féle hatalmas, 60 ampères s 40 voltos fényvetővel, melynek szénrúdjai úgy voltak berendezve, hogy a fényt nem direkt a széncsúcsoktól, hanem egy parabolikus fémtükör visszaverődéséből nyerte.

Egyrészt e hatalmas fényforrással, másrészt a jellevő üveg-hengerében a levegő megfelelő ritkításával — 200 mm nyomás mellett — készülékének hatástávolságát egész 1·3 km-re fokozta. A használt jellevő kvarclencsájének átmérője nem volt több 4 cm-nél s az elektródoknak egymástól való távolsága mintegy 5 milliméterre volt beállítva.

ZICKLER vizsgálatai folyamán azt tapasztalta, hogy az ívlámpa ívhosszának s az áram feszültségének növelése lényegesen erősíti az ultraibolya sugarak termelését.

A fényelektromos hatás távolságának fokozása várható az ívfény erejének növelésén kívül, ha a vetítő tükröt oly anyagból állítjuk elő, mely tökéletesebben veri vissza a hatékony ultraibolya sugarakat; továbbá, ha az ultraibolya sugaraknak minél



nagyobb mennyiségét gyűjtjük össze a kathodon; ha a jellevő hengerét oly gázzal töltjük meg, mely a szikrák kiváltását még jobban elősegíti.

Tekintve az eddig elért eredményeket, jogosan remélhetjük, hogy a vezető drót nélkül való telegrafálásnak ezen újabb módja gyakorlati alkalmazásában szép jövőnek néz elébe, különösen oly helyeken, hol a drót összeköttetés eleve ki van zárva, pl. világító tornyok és hajók jelváltásainál. Bármely világításra szolgáló fényvető minden nehézség nélkül berendezhető, hogy egyúttal a fényelektromos telegrafálás céljaira is szolgálhat.

(Elektrotechnische Zeitschrift 1898. H. 28., 29., 49. nyomán.)

*Dietz Lajos.*

E cikk, noha még februáriusban küldetett be, a II. füzetbe már nem volt beállítható. Időközben megjelent a Természettudományi Közlöny XLIX. Pót-füzetében hasonló dolgozat s minthogy a két cikk ábrája megegyezett, a Természettudományi Társulat szíves engedélyével a kész clichéket felhasználhatuk. Szerző időközben cikkében az újabb eredményeket is vehette tekintetbe.

Szerk.

## A HOLD HEGYEINEK KISÉRLETI UTÁNZÁSA.

(Első közlemény.)

Ha a phlegræi mezőknek vagy a capverdei szigeteknek úgynevezett francia modorú térképét elkészítjük, melyben, mint DUFOUR a Svájc számára kitűnően sikerült módon tette, a felület domborzatát ferde megvilágítás által iparkodunk kitüntetni, oly látképhez jutunk, mely a csalódásig hiven hasonlít a Hold tájainak legtöbbjéről felvett térképekhez vagy fényképekhez. Nem csoda tehát, ha a Hold úgynevezett kraterképződményeit, melyek úgy feltűnőségük mint számuk folytán a holdtopographia leglényegesebb elemét teszik, behatóbb kritika mellőzésével egyszerűen vulkánikus eredetűeknek mondják s a vulkánosságot ezen a révén a Holdra is, sőt az úgynevezett új csillagok révén az egész kosmosra terjesztjük ki. Az állítólag még most sem teljesen kihalt lunáris vulkánosság rovására írják ama változásokat is, melyeknek legalább némelyike a Hold felületén tényleg esett s melyek a Földön a Monte-Nuovo, a Ferdinandea sziget s hasonló alakzatok képződésében hű analogont találnak. Minthogy egy ivmásodpercznyi ív a Hold távolságában 1866 m-nek felel meg, a változásnak elég tekintélyesnek kell lennie, hogy a Földről észrevehető legyen. A közvetlenül észlelhető változásokon kívül nem oly nagyon régen még a hullócsillagokat, különösen a Földre eső meteorköveket a holdvulkánok közvetetlen productumának tekintették. És W. HERSCHEL 1783 május 4-ikén valóságos vulkánikus kitörést is vélt észlelhetni a Holdon.

Hogy megítélhessük, mennyiben nevezhetők a kráterképződmények a holdfelület jellemzőinek, tekintsük meg ezek NEISON-féle



osztályozását, a mely szerint négy alapképletet fogadhatunk el. Legfeltűnőbbek ama sötét foltok, melyek már szabad szemmel is láthatók, s melyeket HEVELIUS maréknak keresztelt el. Nagyságuk és önállóságuk mértékében paludes, lacus és sinus elnevezésekkel is találkozunk. E képletek a Hold látható felszínének mintegy  $\frac{2}{5}$ -ét teszik és kiterjedt síkságoknak tekintendők, melyek a Holdon víznek vagy egyéb folyadéknak teljes hiányában egyszersmind a magasságméréseknek legalább relativ értékű zérus felületét szolgáltatják.

Természetes, hogy HEVELIUS nomenclaturája, mely vízmedenczékre emlékeztet, teljesen képletes jellegű.

A kráterek általában véve köralakú sánczfalak; külső lejtőjük lankás, a belső meredeken ereszkedik alá. A belső sík középpontjából gyakran egy vagy több, a falnál alacsonyabb kúp emelkedik. Nagyságuk és különösebb alakjuk szerint sánczokra osztjuk, a melyek átmérője 240 km-ig terjedhet. E sánczok szabálytalanul határolt és elágazott gyűrűk, melyek a mare és tulajdonképeni kráterek között közvetítő szerepet játszanak.

A hegygyűrűk szakadozott és a beomlás nyomaival bíró, különben a sánczokat utánozó képződmények; agyűrűs hegységek, melyek a kráterképződmények túlnyomó részét teszik, köralakú sánczczal köryezett síkok, középen alacsonyabb centrális kúppal. A kráter-síkok ezekhez közel állanak, de szakadozottabbak és vadonabbak. A tulajdonképeni kráterek 7—20 km. átmérővel birnak, katlanszerűek, szabályos, nem magas sánczczal bekerítvék és már tetemes fényességük folytán is feltűnők. Ezeknek kisebb faja a kis kráterek 1—9 km. átmérővel, melyek minden másféle képződménnyel vegyest fordulnak elő. A krátergödrök azok, melyek sáncza a környező síkságból igen kis hajlással emelkedik s melyek ezért mint valódi depressiók nem vallanak vulkánikus eredetre. Végre vannak még egyszerű depressiók, valódi völgykatlanok bekerítő sáncz nélkül és izoláltan felmeredő hegykúpok centrális mélyedés-sel, mely alig hatol a kúp feléig. Ezek hasonlítanak, mint látni fogjuk, még legjobban a földi vulkánokhoz. SCHMIDT térképében nem kevesebb, mint 33,000 ezen osztályhoz tartozó objectum foglaltatik.



A Hold hegységei — HEVELIUS szerint montes — hegylánczokra, szigethegyekre, elágazó dombvidékekre és a vadon tájakhoz tartozó hegyhátakra oszlanak. Ezen formatiók, és különösen a hegylánczok leginkább hasonlítanak földi megfelelő alakokhoz, a minék kifejezéseül a földi lánczhegyek neveit is viselik.

Egészen különálló csoportot képeznek (Rillen), igen keskeny (1 km. szélességű) többnyire egyenes 300—500 km. hosszú barázdák és hasadások, melyek a sánczokon, a hegyhátakon, a krátergödrökön megszakítatlanul keresztülhatolnak. A legerősebbet, mely Hyginus közelében fekszik, már SCHRÖTER is ismerte; jelenleg az ismertek száma az ezret már elérte.

A Hold hegyeinek magassága körülbelül ugyanaz, mint a Földön. A legmagasabb megmért hegy a Curtius gyűrűshegy, melynek kráterfenéke 8000 m-rel áll a külső sík fölött. A hegylánczokban 6000 méteres emelkedések éppen nem mennek ritkaság számba. Ebből következik, hogy e hegyek a Hold átmérőjének 470-edére rugnak, míg a Föld legmagasabb hegye a földátmérőnek csak 1440-edét teszi. Igaz, az összehasonlítás csak akkor teljes, ha a földi hegyeket is az óceán fenekéről mérnők. Ily módon a viszony ugyan 720-dra redukálódik, de látni való, hogy a Hold domborzata sokkal nagyobb mértékben másítja meg a gömbalakot, mint a Föld esetében.

A telehold számára azonkívül még jellemző ama fényes sugárrendszer, mely a nagyobb kráterekből kiindul s sok 100 kilométeren át folytatódik a Hold tányérján. Általánosan ismeretes a Tychóból kiáradó sugárzás, mely úgy fest, mintha a Hold mesterseges meridiánokkal volna felosztva. Ugy a fényerek, mint ezen sugarak mibenléte teljesen rejtélyes. Az előbbieket vizsgálatát különösen a rendkívüli keskenység gátolja. SCHMIDT ezeknél a vulkánikus eredetre gondol.

A SCHMIDT-féle holdtérkép, eddig a legtökéletesebb, mely közvetlenül háromszögelésen alapszik, 40,000 objektumot tartalmaz, és ezek közül, mint említém, több mint 33,000 a kráterképződmények osztályához tartozik. Ezzel teljesen be van igazolva, hogy ezen formatio a Holdra nézve jellemző.



Természetes, hogy a közönséges holdhegyek orogenesisére vonatkozó elméletek teljesen ugyanazok, melyeket a Föld esetében is alkalmazunk. Tekintetbe veendő a további fejlődésre nézve csupán az, hogy a Holdon víz- és levegő nincs, hogy a nappal a nyárral, az északa a téllal synonym, s hogy ez időszakok között a hőmérsékleti különbségek, mint ezt ROSSE, majd LANGLEY bolometer-jével kimutatta, legalább is  $300^{\circ}$ -ra rúg.

BESSEL közvetlen megfigyelései szerint, melyek a Hold horizontál-refraktiójára vonatkoznak, a levegő a mi légkörünk alsó rétegének legfőlebb 400-dával egyenlő sűrűséggel birhat, az elmélet pedig, akár a hőelméletből induljunk ki, akár a mechanikai gázelméletből a holdlégkör létezését teljességgel tagadja. A hőelmélet első tételével és a nyomás egyenletével ki lehet ugyanis könnyen mutatni, hogy minden égi test számára létezik a hőmérséklet számára egy felső határ, melyen túl az égi test adott tömeg és térfogat mellett légkörét többé le nem kötheti. Ezen szóródási hőmérséklet a Hold esetében, még ha levegője hydrogen volna is,  $-76^{\circ}$ , tehát tetemesen mélyebb, mint a Holdnak legalább is nyári hőmérséklete.

Ily viszonyok között természetesen a víznek nem találjuk nyomát, a mit különben a spektrálanalýsis is támogat, és ZÖLLNERnek ama feltevése, mintha a Holdon legalább jég volna, direkt megfigyelések által, melyekről később még szólok, szintén semmis.

Különös, a földi orogenesisben ismeretlen hypothezisek tehát csupán a kráterképződmények számára kellene. De ezeknek túlnyomó száma egyszersmind a leghatározottabban ki is hívja a spekulatiót.

Említettem, hogy a vulkanismus feltevése, melyet pláne általános kosmikus jelenségnek szeretnek feltüntetni, a legáltalánosabban elfogadott, és legnagyobb támasza SCHMIDT JULIUS, ki úgy a Holdnak, mint különösen santorini megfigyelései által a vulkanismusnak egyik legjobb ismerője.

Azonban az antivulkanisták tábora is elég erős. A kráterekből kiáradó sugárrendszereket pl. előszeretettel mesterségesen is állít-



ják elő mint ama repedéseket, melyeket üveggömbbe zárt víz megfagyasztása okoz.

SCHMICK a holdfelület alakulását özönlési hypothesisével hozza kapcsolatba, a mennyiben a Föld tömegvonzása a Holdnak egykor folyós belsejében kétségtelenül hatalmas tengerjárást hozott létre. Ezen hypothesisnek, mint későbbben látni fogjuk, van valami igaz magva, bár SCHMICK hypothesisei a földi alakulatok képzésére nézve nem éppen kedveltek.

Mások szerint — s ezek táborába tartozik MAEDLER is — a Hold belsejéből temérdek gáztömegek emelkedtek ki, melyek a Hold szivósan folyós felületét duzzasztották, áttörték és hólyagosan tel-fujták.

Elég sok hive van a különböző módon megnyilatkozó meteor-hypothesisnek is. Egy ASTERIOS névvel élő ismeretlen a vulkánosság tanával szemben ama ellenvetést teszi, hogy a kráterek térfogata nem felel meg a környező hegyek térfogatának ; de ugyanazon ellenvetéssel elutasíthatnók az Eiffelben található Maare-k és az újzeelandi kratertavak tanát is. Szerinte kosmikus testek, nevezetesen meteorokövek, melyek ezelőtt sokkal tekintélyesebb számban keringtek, hulltak le a Holdra, alásülyedtek benne és a lemerülés helye körül felgyűrődött a folyós anyag, sánczot, körgyűrűt képezve. A centrális kúp ama folyadéktömeg, mely az alásülyedt meteor-tömeg felett összecsapott és egyensúlyi helyzetének visszanyerése előtt megdermedt.

A meteorelmélethez GILBERT is járul, de ezt már kritikával kíséri. Ha ugyanis a meteoritek minden irányból jönnek, akkor a Hold jelentéktelen nehézsége folytán a legtöbb közel  $45^\circ$ -nyi szög alatt esik be s következésképen a legtöbb kráter elliptikus volna. Minthogy ennek a tapasztalat ellentmond, fel kell tételezni, hogy a meteorraj ugyanazon pályában mozog, mint maga a Hold, szóval, hogy a Hold saturnusi rendszert képezett. Ekkor a hullócsillag relatív sebessége a Holdhoz képest null és az esés csupán a Hold vonzása folytán történik. Ez is elegendő, hogy megoldassza a környéket és létesítse a felgyürt körsánczot. A kráternyílás a hulló tömeg sugarainak négyzetével arányos, a fejlesztett hő ellen-



ben ugyan e méret harmadik hatványával; látható tehát, hogy az olvasztás nyoma leginkább csak a nagy kráterekben található. Hogy a kráterek nem mind az æquator övében állanak, onnan lehet, hogy eső tömegek a Hold forgási tengelyét folytonosan megváltoztatták.

A kráterekkel kapcsolatos GILBERT szerint számos vonal, mely a mare imbrium felé convergál a nélkül, hogy abba belépne. Körületében az alakok egyszersmind kerekdedebbek is. Ott tehát valamikor különösen bő meteoreső hullhatott. A fényerek, melyek részben a Colorado grand cañonjával hasonlíthatók össze, karczolatok. Ezek közül igen sok, nevezetesen felénél több, a mare imbrium felé irányúl.

ALTHAUS bányatanácsos kísérletei alapján ugyancsak hasonló nézetten van. A kráterek szilárd alapra való tömegesésből keletkeztek. Nem is szükséges, hogy a Hold felülete szivósan folyós lett legyen. Pánczélokra eszközölt lövések ugyanilyen alakokat adnak.

Valamivel kevésbbé erőszakos módon hozatja létre kráterjeit MEYDENBAUER. A Hold felülete szerinte soha sem volt folyós, hanem a kráterek egyszerűen poralakú tömegeknek poralakú alapra való esésének köszönik létüket.

Látnivaló, hogy mindezen hypothezisek egyszerűen a kráterek gyűrűs alakját iparkodnak megmagyarázni és ezt nagyjában el is érik jól. De könnyen elképzelhető, hogy minden tekintetben megfelelő hypothesis csak akkor költhető, ha a hegyek méreteiről pontos méréseink vannak, szóval, ha a Hold orometriájával rendelkezünk. Ennek szükségét már SCHMIDT is érezte, és 1856-ban megjelent «Der Mond» című munkájában már egynehány erre vonatkozó példát is ad. SCHMIDT több mint 30 éven át mérte és észlelte a Holdat, de mindig annyi mérni valót talált még, hogy tulajdonképeni számításokig el nem juthatott.

A következő, természetesen csak a jellemző gyűrűs hegyekre vonatkozó számításokat H. EBERT mutatta be Erlangenben a philosophisch-medizinische Fakultätnek 1890-ben. Elég érdekeseznek tartom eredményeit, hogy e helyen ismertessem. A számítás minden méretre kiterjeszkedik, a mely minden belátás szerint a hegy-



képződésének megértésére mérvadó lehetett. Az orogenesis érdekében mindenekelőtt fontos ama kérdés, vajon a gyűrű tömege a tányéralakú mélyedés körül a mélyedés térfogatával egyenlő-e vagy sem? azaz, hogy egyszerű tömegátvitellel vagy még más factorokkal is van-e dolgunk?

SCHRÖTER vetette fel először ezen kérdést, melyre experimentális uton feleletet is keresett. Fából mélyedésszerű tányérokat készített, melyek körül még gyűrűs vályú volt. Ezt homokkal töltötte ki, a közepre hajtotta és a két felületet most összehasonlíthatta. SCHRÖTER azt vélte találhatni, hogy a gyűrű térfogata a mélyedésévé azonos. MAEDLER szerint a számító eljárás sokkal egyszerűbb, de ő maga erre vonatkozó kutatásokat soha nem eszközölt.

A SCHMIDT-féle catalogus 2894 magasságmérést tartalmaz, de csak 92 gyűrűs hegység számára van meg minden adat a gyűrű térfogatának meghatározhatására. Különösen hiányosak a belső és külső lejtésre vonatkozó mérések, úgy hogy ezek megállapításában meglehetősen szerep jutott a becslésnek. Ezt természetesen tetemesen megkönnyítette és biztossá tette a Hold részleteinek kitűnő photographiai felvételei, melyeket Warren de la Rue eszközölt. SCHMIDT szerint a legtöbb gyűrűshegy külső lejtése  $3-8^\circ$ , a belső  $25-50^\circ$ , ezek tehát oly lejtők, melyek a Földön csak ritkán fordulnak elő.

A gyűrűk átmérője is sok esetben a mérések alapján készült térképből vannak merítve; elliptikus kratereknél a két átmérő közepe szerepel. Igen sok esetben hiányzik a gyűrűfal magassága a környezethez képest. Ez pedig nagy kár, mert jellemző, hogy a holdhegységek a környezet szintjénél mélyebben fekvő alaphól emelkednek. A centrális kúpok magasságai sem nagyon számosak. Legtöbb esetben vannak lemérve a gyűrűfalak magasságai a belső mélyedés fölött. Ezeket már SCHMIDT maga is rendezgette. EBERT táblázataiban, minden ugyanazon hegységre vonatkozó használható adat már középértékével szerepel. Gyakran elegendő a *W* és *E* fal magasságának közepe; csak ott, hol a szint nagyon különböző, mint pl. Eratosthenesnél, használt EBERT komplicáltabb eljárást.

EBERT összeállítása 92 gyűrűshegységre vonatkozik; ezeket kis,



közép és nagy kráterekre osztályozza, a szerint a mint átmérőjük kisebb mint 28 km, vagy 28 és 90 km. között lévő, vagy nagyobb, mint 90 km. Ezen beosztás, melyet a selenographusok czélszerűnek tapasztaltak, itt is jogosultnak bizonyul. EBERT azután minden kratert röviden jellemez különös tekintettel a környezetre, mert gondolható volna, hogy a világos, fényes talajon fekvők más méretekkal bírnak, mint azok, melyek a márékból emelkednek, a mi a talajminőségével való vonatkozásra utalna.

EBERT a következő méreteket tünteti fel:

$J$  a középső belső mélység, a gerincz szélétől a mélyedés talpáig.

$A$  a gyűrű közepes magassága a közepes környezet szintje felett.

$D$  a gyűrűnek átmérője.

$h$  a központi hegy magassága, vagy ha több volna, ezek közepe a mélyedés talpától.

$\alpha$  és  $\beta$  a gyűrűfal lejtése belül és kívül.

COPPERNIKUSNál olvasunk pl.: Nagy gyűrűs hegység, hatalmas bástyalánczatok, viszonylagos sík környezetben  $I = 3.175$ ;  $A = 0.900$ ;  $D = 90.15$ ;  $h = 0.615$ ;  $\alpha = 33^\circ.5$ ,  $\beta = [6^\circ]$ .

Ezekből vezeti le EBERT a következő méreteket:

$$\begin{aligned}
 I - A &= 2.275 & \frac{I}{A} &= 3.53 & \frac{I}{D} &= 1 : 28,4 = 0.035 \\
 \frac{D}{h} &= 146.6 & \frac{I}{h} &= 5.16 & d &= I - A - h = 1,660 \\
 \frac{D}{d} &= 54.3 & \frac{I-d}{D} &= 0.017 & I - d &= 1.515 \\
 \frac{I}{d} &= 1.913 & K &= 9.48 & \varepsilon &= 1 - K = -8,48.
 \end{aligned}$$

Ezen számok értelme közvetlenül adódik;  $I - A$  a gyűrűshegység katlantalpának mélyedése az általános szint alá; s. i. t. Csak  $K - t$  kell bővebben magyarázni.

Az  $I$ ,  $A$ ,  $D$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  adatokkal számítható 1. a közepes szint alatt fekvő mélyedés térfogata, melynek mélysége tehát  $I - A$ ; 2. a gyűrűtömeg térfogata, melynek bázisa a közepes niveau. Mindkét

térfogat három csonka kúp térfogatából adódik az alapkörök következő sugaraival és a következő magasságokkal:

$$V_1 = V_1 \left( I, \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - I \cot \alpha \right); \quad V_2 = V_2 \left( A, \frac{D}{2}, \frac{D}{2} + A \cot \beta \right); \\ V_3 = V_3 \left( A, \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - A \cot \alpha \right).$$

A mélyedés térfogata nyilván  $V_1 - V_3$ ; a gyűrűé  $V_2 - V_3$  és a kettő viszonya:

$$K = \frac{V_1 - V_3}{V_2 - V_3} \text{ és } \varepsilon = 1 - K = \frac{V_2 - V_1}{V_2 - V_3};$$

mindkét adat a hegység nevezetes jellemzője.

Lényegesen jellemző méretek  $I$ ,  $A$ ,  $D$ ,  $I - A$ ,  $\frac{I}{D}$ ,  $\frac{I}{A}$  és  $K$  7 mennyiség, a melyek között bizonyos vonatkozások fennállanak. Ezek legegyszerűbben graphikus módon adódnak: A 7 mennyiség ketteje derékszögű koordináta gyanánt tekinthető és e szerint graphikusan ábrázolható. A simuló görbe mindig elég szorosan halad át az egyes 92 ponton. Ez ad  $\left(\frac{7}{2}\right) = 21$  pontcsoportot, melynek főbb eredményei a következők:

I. A  $D$  átmérő és abszolút közép mélység  $I$  összehasonlításából következik, hogy minden gyűrűs hegységnél a horizontális méret sokkalta nagyobb, mint a mélység.  $\left(\frac{D}{I}\right)_{\min.} = 7$  Tebit  $A$ -nál. Aránylag még kis gyűrű síknál (sáncznál) Alphonsusnál pl.  $\frac{D}{I} = 70$ . A tulajdonképeni gyűrűhegyeknél ezen értékek a kettő között fekszenek. Ezek tehát korántsem mély sülyedések vagy épen lyukak, a mint az ember fényképek szemlélése mellett gondolná, hanem kivétel nélkül mind igen lapos tányérok, habár a belső mélység abszolút értéke esetenként elég tekintélyes lehet.  $\frac{D}{I} < 1$  alakok a kraterképződmények között nincsenek, sőt a  $\frac{D}{I} = 2$  viszony, mely szívós folyadékokban felduzzadt és megrepedt buborékok méretének felel meg (félgömbalakú mélyedések) szintén hiányzik. MAEDLER nézete ezek alapján kereken visszautasítandó.



Sőt a gyűrűshegyek és sánczok annyira laposak, hogy a Hold görbültsége miatt a tulsó gyűrűfal nem is látható, ha az innenső gyűrűn állanánk. Ennek feltétele, ha  $R$  a holdsugar, azaz 1740 km,

$$2(R + A) \leq \frac{1}{4} D \cdot \frac{D}{I} + I,$$

oly egyenlőtlenség, melyet sok nagyobb gyűrűsik, pl. a SCHICKARD kielégít.

II. Sajátságos, hogy átmérő és belső mélység viszonya nem ugyanazon középérték körül csoportosúl.  $\frac{I}{D}$  ellenkezőleg függ  $D$  abszolút nagyságától: az átmérő fogyásával a relativ mélység nő. Kerek számokban áll:

kis gyűrűs hegyek,	$D \leq 28$ ;	$\frac{I}{D} = 1:10$
közepes alakok	$28 < D \leq 90$	1:20
nagy alakok	$90 \leq D \leq 120$	1:32
sánczsíkok	$D \geq 120$	1:40

Meglehetősen határozott ugrással van tehát dolgunk, ha a kis gyűrűktől a közepesekre megyünk át. Ha  $D < 28$ , akkor csak három kivétellel  $\frac{1}{7} > \frac{I}{D} > \frac{1}{13}$  és  $D > 28$  számára tüstént sokkal nagyobb értékek lépnek fel, a nélkül, hogy a kisebbek felé ismét közeledés történnék. Egészen a  $D = 90$  alakok számára  $\frac{1}{12} > \frac{I}{D} > \frac{1}{28}$  közép-értékek szerint csoportosulnak a méretek.

E magaviselet azért oly feltűnő, mert a gyűrűk közös szabályos köralakjából azt következtetné az ember, hogy a többi sajátságaik is megegyezők. Ha ezt igazolva nem találjuk, akkor ez annak a jele, hogy a képződés folyama nem ugyanaz a nagy és kis alakoknál. Hogy a nagyobbaknál nem épen csak nagyobb mértékben hatottak az előidéző okok, hanem hogy más jelenségek is játszottak közre, melyek függetlenek azon feltételektől, melyek itt egy nagy, ott egy kis gyűrűt hoztak létre.

Ezen egy tény elegendő arra, hogy a kizárólagosan vulkánikus eredet feltevését kérdésessé tegye. E szerint a legnagyobb kráterek



volnának a legmélyebbek, holott a Holdon éppen megfordítottja áll. A holdhegyek nem utáNZása ugyanazon modellnek különböző méreTben; általános alakjuk változik az átmérő nagyságával, és ennek nöTtével ellapúlnak. Ha ugyanis a relatív mélyedés független volna nagyságuktól, akkor a  $D = x$ ,  $\frac{I}{D} = y$  görbe az  $x$  tengelylyel párhuzamos egyenes volna. Ez körülbelül úgy is volna a kis  $y = C_1 = 10$  és a közepes  $\frac{I}{D} = C_2 = 20$  gyűrűk számára. De  $D = 90$ -tól fogva a görbe emelkedik s majdnem egyenes vonal alakjában száll fel.

III. Ugyanezt kapjuk, ha a  $D = x$ ,  $I = y$  görbét tanulmányozzuk. Növekedő  $D$  mellett nő általában véve  $I$  is, azaz a nagyobb gyűrűk absolute véve mélyebbek is. De egyrészt  $D$  sokkal gyorsabban nő, mint  $I$ , és másrészt  $D = 90$ -tól fogva a görbe az  $I = 3.5$  távolban lévő,  $D$ -vel párhuzamos egyeneshez közeledik asymptotikusan. Azaz a 90 km-nél nagyobb átmérőjű gyűrűk átlagosan ugyanazon 3.5 kmnyi belső mélységgel birnak.

Egyes eltérésekkel természetesen találkozunk; a számok csak azt bizonyítják, hogy egy bizonyos átmérőtől kezdve az alakulás egyedi különbözőségei háttérbe nyomúlnak, melyek a kisebb alakoknál mérvadók és szemlátomást az átmérő absolut értékével függnék össze.

IV. Egészen hasonlóan áll a dolog az  $A$  és  $D$  vonatkozása számára; ezek is nőnek  $D$  értékével.  $D = 90$ -tól fogva asymptotikusan közelednek 1.0 — 1.5 középvértékhez. Itt is feltűnő a  $D = 90$  felső és  $D = 28$  km. alsó határ. Feltűnő, hogy a közepes gyűrűshegységek sorából egész sorozat kiválik és a kis értékek felé hajol, míg a többiek elég szorosan simulnak egy közepes értékhez. A kivált sorozat közép nagyságú átmérője daczára feltűnő kis külső magassággal bir. Az összehasonlítás azt mutatja, hogy ezek mind márékban fekvő gyűrűk, pl. MARIUS, ARISTARCHOS, PLINIUS, TASUNTIUS stb. Úgy látszik, hogy ezen alakok utólagosan részleges előzőnléseknek voltak kitéve, melyek által a hegy külső töve elfödett, úgy hogy külső magasságát kisebbnek mérjük, mint a mekkora tényleg.



V.  $\frac{I}{A}$  a gyűrűk relatív mélyedése.  $\frac{I}{A} = \infty$  bástyanélküli egyszerű mélyedés,  $\frac{I}{A} = 1$  ellenben egyszerű hegykoszorú, melynek belső és külső szintje ugyanaz. Ez extremek egyike sem fordul elő. De a  $D$ -vel való összehasonlítás azt mutatja, hogy a kis gyűrűk fogyó átmérővel mindinkább közelednek az első extremhez; ezeknél a gyűrű emelkedése mindinkább háttérbe szorúl, a mélyedés túlnyomó. Növekedő  $D$ -vel  $\frac{I}{A}$  fogy, a külső és belső szint egymásfelé közeledik.  $D = 90$ -tól fogva, midőn  $A$  és  $I$  bizonyos közepes értékhez közeledik,  $\frac{I}{A}$  szintén állandóan 2.5, s ez a holdhegységek relatív közepes mélyedése.

VI.  $I - A$  a belső talp mélyedésének abszolút értéke a közepes holdszint alá a nagyobb alakoknál ugyan valamivel nagyobb, mint a kisebbeknél, de igen nagy és kevésbé nagy süllyedések úgy a nagy, mint a kis alakoknál körülbelül egyformán gyakran fordulnak elő.

VII. A központi kúp magassága soha nem éri el a gyűrű gerinczél,  $\frac{I}{h} > 1$  mindig. A közép 2.87, a legnagyobb érték 9.37 (GEMINUS esetében), a legkisebb 1.46 (ALPHONSUS-nál).  $d$  azt mutatja, hány kilometerrel fekszik a központi csúcs az általános niveau alatt; ha  $d$  negatív, akkor a csúcs még a közép szint felett áll. Az összeállításban 19 erre vonatkozó adat van; ezek között 6, tehát 30% negatív  $d$ -vel bír. Tehát a csúcs nem fekszik mindig a közepes szint alatt, mint azt azelőtt gondolták.

$h$  és  $d$  számára különben nem ismerhető fel valamely egyszerű vonatkozás más mennyiségekkel, és úgy látszik, hogy a középponti csúcs képződése igen sok individuális befolyásnak volt alávetve. Lehet, hogy ez csak véletlen járulék, mely átlag annyiszor képződött, mint a hányszor kimaradt. Különben éppen ezen pontra vonatkozólag a mérések nagyon hézagosak, általános következtetéseket már ezért sem szabad vonni.

Kövesligethy Radó.

## MEGOLDOTT FELADATOK.

26. Bizonyítsák be, hogy a tetraéder magasságainak hiperboloidja ama fajhoz tartozik, a melynél a LAPLACE-egyenlet gyökeinek összege zérus. (VÁLYI.)

★

*Első megoldás Csillag Vilmos műegyetemi tanársegéd úrtól.*

Az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy a tetraéder szög-pontjainak Descartes-féle koordinátái a következők:

$$(0, 0, 0), \quad (1, 0, 0), \quad (x_2, y_2, 0), \quad (x_3, y_3, z_3).$$

A kezdőpontban egyesülő tetraéderlapok egyenletei

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ z_3 y - y_3 z &= 0 \\ y_2 z_3 x - x_2 z_3 y + (x_2 y_3 - y_2 x_3) z &= 0, \end{aligned}$$

hol az együtthatók — mint ismeretes — a sík normálisának iránycosinusaival arányosak. Ennek alapján a szemben fekvő szögpontokból e síkokra vont magasságok parameteres egyenletei

$$\begin{aligned} x &= x_3 \\ y &= y_3 \\ z &= z_3 + t \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x &= x_2 & x &= 1 + y_2 z_3 t'' \\ y &= y_2 + z_3 t' & y &= -x_2 z_3 t'' \\ z &= -y_3 t' & z &= (x_2 y_3 - y_2 x_3) t''. \end{aligned} \tag{2} \tag{3}$$

Célunk a tételben szereplő, e magasságokból meghatározott hiperboloid egyenletét fölállítani. E hiperboloid geometriai helye az imént talált magasságok közös szelőinek. Az első magasság (1) szelőjének egyenletei:



$$\begin{aligned}\xi &= x_3 + at \\ \eta &= y_3 + \beta t \\ \zeta &= z_3 + t + \gamma t.\end{aligned}\tag{I}$$

Hogy e szelő a (2) és (3) magasságvonalakat is messe, az két föltételi egyenletben fog kifejezést nyerni, a melyekből  $t$  kiküszöbölése útján jutunk a hiperboloid egyenletére. Könnyű látni, hogy az (I) és (2) sugarak metsési föltétele

$$\begin{vmatrix} x_3 - x_2 & a & 0 \\ y_3 - y_2 & \beta & -z_3 \\ z_3 + t & \gamma & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

valamint az (I) és (3) sugaraké

$$\begin{vmatrix} x_3 - 1 & a & -y_2 z_3 \\ y_3 & \beta & x_2 z_3 \\ z_3 + t & \gamma & -x_2 y_3 + y_2 x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Vagy ha (I) alapján  $\alpha, \beta, \gamma$  helyett a velük arányos  $\xi - x_3, \eta - y_3, \zeta - z_3$  mennyiségeket írjuk, lesz

$$\begin{vmatrix} x_3 - x_2 & \xi - x_3 & 0 \\ y_3 - y_2 & \eta - y_3 & -z_3 \\ z_3 - z_2 & \zeta - z_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_3 - 1 & \xi - x_3 & -y_2 z_3 \\ y_3 & \eta - y_3 & x_2 z_3 \\ z_3 + t & \zeta - z_3 & -x_2 y_3 + y_2 x_3 \end{vmatrix} = 0$$

és a  $t$  parametert eliminálván lesz:

$$\begin{vmatrix} \xi - x_3 & 0 \\ \eta - y_3 & -z_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_3 - 1 & \xi - x_3 & -y_2 z_3 \\ y_3 & \eta - y_3 & x_2 z_3 \\ z_3 & \zeta - z_3 & -x_2 y_3 + y_2 x_3 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \xi - x_3 & -y_2 z_3 \\ \eta - y_3 & x_2 z_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_3 - x_2 & \xi - x_3 & 0 \\ y_3 - y_2 & \eta - y_3 & -z_3 \\ z_3 & \zeta - z_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{II}$$

melyből még  $z_3$  mint közös tényező elhagyható, mert  $z_3$  nem lehet zérus, különben a tetraéder negyedik szögpontja is az  $xy$ -síkra esnék. Ez a keresett hiperboloid egyenlete és hátra van megmutatni, hogy a megfelelő LAPLACE-egyenlet gyökeinek összege elenyészik.

A másodrendű felület általános egyenlete a szokásos jelöléssel

$$\begin{aligned}a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{12}\xi\eta + 2a_{23}\eta\zeta + 2a_{31}\xi\zeta + 2a_{14}\xi + 2a_{24}\eta + \\ + 2a_{34}\zeta + a_{44} = 0,\end{aligned}$$

a hozzátartozó LAPLACE-egyenlet

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a_{ik} = a_{ki})$$

és gyökeinek összege vagyis  $\lambda^2$  együtthatója

$$a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Hiperboloidunk egyenletében  $\xi^2$  elő sem fordul, tehát

$$a_{33} = 0,$$

a mi pedig  $a_{11}$ - és  $a_{22}$ -öt illeti, ezek tényleg csak az előjelben különböznek; ugyanis (II)-ből látjuk, hogy  $\eta^2$  együtthatója

$$a_{22} = -y_2 y_3 (x_3 - x_2)$$

és  $\xi^2$  együtthatója

$$\begin{aligned} a_{11} &= \begin{vmatrix} y_3 & x_2 z_3 \\ z_3 & -x_2 y_3 + y_2 x_3 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} y_3 - y_2 & -z_3 \\ z_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= -x_2 \begin{vmatrix} y_3 & -z_3 \\ z_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_3 & 0 \\ z_3 & y_2 x_3 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} y_3 & -z_3 \\ z_3 & y_3 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} -y_2 & 0 \\ z_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= y_2 y_3 (x_3 - x_2). \end{aligned}$$

Az  $a_{11} + a_{22} + a_{33}$  eltűnése föltétele annak, hogy az asymptotikus kúpot bármely alkotójára merőleges átmérő-sík egymásra merőleges alkotópárban messe.

A tetraéder magasságainak hiperboloidja tehát szintén ilyen iránykúppal bír.

A tétel idézett geometriai jelentése megtalálható pl. CLEBSCH-LINDEMANN «Vorlesungen über Geometrie» II. kötet 194. lapján — analitikailag kifejtve, vagy FIEDLER «Darstellende Geometrie» III. kiadás II. kötetének 297. lapján 21) alatt — mint tisztán projektív-geometriai tárgyalás eredménye.



## IRODALOM.

**A légnyomás a magyar birodalomban 1861—1890-ig.** Irta RÓNA ZSIGMOND meteorológiai intézeti adjunctus.

E czimmel jelent meg a kir. magy. Természettud. Társulat kiadásában egy munka, mely a légnyomási viszonyokat tárgyalja hazánk területén. A vizsgálat 23 állomás adatait használja fel e célra. A munka 14 fejezetre oszlik. Az első három fejezet a barometeradatokat befolyásoló következő három tényezővel foglalkozik: a meteorológiai országos intézetben a 30 év alatt használt normalbarométerek állandóival (melyekkel az állomásokra küldött barométerek összehasonlítottak), a barométer tengerszín feletti magasságával és a nehézségerő befolyásával a barométeradatokra. Az állomások lajstromát követi az V. és VI. fejezetben a légnyomás napi és évi menetének vizsgálata. Előbbi az ó-gyallai barograph 1891—95. évi feljegyzései alapján történt; a napi menetnek trigonometrikus sorba való fejtése a légnyomás napi ingadozásának Hann által felállított elméletébe szépen beleilleszkedik, mely szerint a tűnemény egy kétszeres és egy egyszeres napi oscillációból tevődik össze; az utóbbinak tűneményei helyi hatások által módosulnak, az előbbi általános jellegű és a helyi viszonyoktól független. A légnyomás évi menete oly öt állomás adatai alapján vizsgáltatott meg, a melyeken az észlelések 30 éven keresztül megszakítás nélkül történtek, Szegedet kivéve, a melyet ki kellett egészíteni. Az általános törvényt, hogy t. i. az évi menetben az európai szárazföldön északnyugatról délkeletre menve az ingadozások nagyobbodnak, az itt nyert eredmények is igazolják. Három ábra világosítja meg a napi és évi menetre lehozott eredményeket. A következő fejezet a légnyomás gyakorisági értékeinek van szentelve, melyhez a budapesti reggel hét órai adatok 1873—92 szolgáltatják a vizsgálati anyagot. A gyakorisági görbére vonatkozó érdekes tanulmány ifj. Tolnay Lajostól egészíti ki e vizsgálatot. A VIII. és IX. fejezet a légnyomás átlagos és abszolút változékonyságával foglalkozik Budapest, Nagy-Szeben és Árvaváralja adatai alapján. A X. fejezet a nem teljes észlelési soroknak kiegészítésére általánosan használt módszert: a középértékek «különbözeteinek» módszerét tárgyalja. Minthogy a felhasznált észlelési so-



rok közül csak Budapest, Nagyszeben, Árvaváralja és Zágráb teljeseek, míg a többi ezek alapján kiegészítésre szorul, és e célra e módszer használatot fel — az eljárás részletes megbeszélés tárgyát képezi, mindazon szempontok kiemelésével, melyek a módszer alkalmazásánál tekintetbe veendőek. A következő fejezetben szerző az eredeti feljegyzéseket gondos kritika tárgyává teszi, a műszerek hibáit, az észlelési sorok homogeneitását, a műszerekben és az észlelésekben a 30 év alatt történt változásokat behatóan tárgyalva. Ezeknek tekintetbe vételével és a szomszéd állomások eredeti feljegyzéseinek egymással való összehasonlítása útján nyerte szerző a 23 állomás 30 éves — lehetőleg megbízható — észlelési sorait (havi közepeket, melyek ugyancsak e fejezetben közölve. A XII. fejezet tartalmazza a barometrikus magasságképletet és ezzel összefüggésben a hőmérséklet és páratartalom befolyását a barometrikus magasságmérésre; a XIII. fejezet a barometerállásnak a tengerszínre való redukciójával követendő eljárással és az átszámító táblák készítésének módszerével foglalkozik, közölve a 23 állomásra az átszámító tábla schémáját és a 30 évi légnyomásközepeknek a tengerszínre átszámított értékeit. A XIV. fejezetben az előbbieken alapján az évi és havi izobárok alakja, változása és az általános légnyomási helyzetekkel való összefüggése képezi megbeszélés tárgyát. E vizsgálatot kiegészíti 14 térkép, az évi és havi izobárokat, továbbá az 1897. április 3. reggeli 7 órai barometrikus helyzetet tüntetve fel, mely utóbbi rendkívül erős gradienseket mutat és annak illusztrálására szolgál, hogy egyes esetekben, rövid időközre az izobárok eloszlása a havi középizobároktól lényegesen eltérhet. A légnyomáseloszlásnak összefüggése a csapadékkal és hőmérséklettel egészítik ki e fejezetet. Függelékképp a vizsgálat menete és a főbb eredmények a külföldre való tekintettel német nyelven is közölve.

Steiner L.

### Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften.

59. *Otto von Guericke's* neue «magdeburgische» Versuche über den leeren Raum. (1672). A légszivattyúval végzett első kísérletek, melyek olvasása nem csak azért jár haszonnal, mert minden első kísérlet leírása újra megvilágítja az illető kérdést, hanem azért is felette érdekes, mert GUERICKEVEL kezdődik a skolasztikus iskolától való elpártolás Németországban és így természetesen még elég zavart látunk fizikai felfogásában. Így pl. ő, ki a lég súlyáról, feszültségéről, tiszta képet alkotott magának, tagadta, hogy a levegő vezeti a hangot, különbözőnek hitte a kocsit huzó és légüres gömböt szétvonó lovak erejét stb. e. f.

63. *Zur Entdeckung des Elektromagnetismus. Abhandlungen von Hans Christian Oersted und Thomas Johann Seebeck.* (1820—1821).



OERSTEDnek eredetileg két nyomatott oldalon közölt értekezése okozta röviddel reá ARAGO, AMPÈRE és SEEBECK idevonatkozó, majdnem egyidejű vizsgálatait és felfedezéseit és képezte így az elektromágnesség hódító útjának kiindulását; de tanuskodik még arról is, hogy a mágneses mező képe már OERSTEDnél is felmerült. Azonban ennek határozott konstrukcióját és az erővonalaknak valóban feltűnően helyes felfogását csak SEEBECKnél találjuk, kinél különben más tekintetben is máig érvényes felfogásokra, pl. a mágneses hatásra mint a kémiai energia mértékére, találunk.

70. *Magnetische Polarisation der Metalle und Erze durch Temperaturdifferenz von Th. J. Seebeck.* (1822—1823). Már az előbb szóvá tett és az «elektromos vezetők mágnességéről» írt értekezésében utalt SEEBECK arra, hogy a mágneses feszültség a hővel összefügg és az ez irányban tett kísérleteit, illetőleg a hőelektromosság felfedezését tárgyalja a jelen értekezés, melyben a még most is érvényes szabályok egész sorát állítja fel. A fémek hőelektrikus sorozatát feltüntető táblázat pedig a maival majdnem egyező, holott SEEBECK mindig csak a «mágnességet» azaz az áram erősségét tartotta szem előtt. Sőt egy helyen már az OHM-féle törvény részletes kimondásával is találkozunk.

Lakits F.

## A KOMPLEX VÁLTOZÓ GAMMAFÜGGVÉNYÉRŐL.

(Második közlemény.)

### II. A gammafüggvény LEGENDRE-féle értelmezése.

5. LEGENDRE a  $\Gamma(x)$  függvényt következőleg értelmezte :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{x-1} du, \quad 9)$$

hol az integrálás útja az  $u=0$  alsó határtól a *pozitív* számokon keresztül halad az  $u=\infty$  felső határig.

Ezen integrál (mint látni fogjuk) ott, a hol véges és meghatározott értékű, valóban az előbbi fejezetben értelmezett függvénynyel egyenlő. Ámde ez az úgynevezett *másodfajú EULER-féle integrál* csak akkor véges és meghatározott értékű, midőn  $x$  valós része pozitív, tehát  $\Gamma(x)$ -et csak a számsík felében értelmezi.

6. Annak eldöntése végett, hogy a vizsgálandó integrálnak mikor van véges és meghatározott értéke, czélszerű azt

$$P(x) = \int_0^1 e^{-u} u^{x-1} du = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 e^{-u} u^{x-1} du \quad 10)$$

és

$$Q(x) = \int_1^{\infty} e^{-u} u^{x-1} du = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_1^{\omega} e^{-u} u^{x-1} du \quad 11)$$

összegére felbontanunk és e két integrált külön-külön megvizsgálunk.

Ha 11) alatt az  $u=v^{-1}$  helyettesítést végezzük, akkor

$$u^x = v^{-x} \quad u^{x-1} du = -v^{-x-1} dx$$



és

$$Q(x) = \lim_{w=\infty} \int_1^w e^{-u} u^{x-1} du = \lim_{w=\infty} \int_{\frac{1}{w}}^1 e^{-\frac{1}{v}} v^{-x-1} dv = \\ = \int_0^1 e^{-\frac{1}{v}} v^{-x-1} dv.$$

Az utolsó kifejezésben az integrálás határai végesek. Továbbá az integrálandó függvény  $x$  bármely értéke mellett az integrálás határai között és a  $v=1$  felső határon  $v$ -nek folytonos függvénye. Végre e függvénynek akkor, midőn  $v$  (az integrálás határai közötti intervallumban) minden határon túl a zérushoz közeledik, szintén véges limese van, t. i.:

$$\lim_{v \rightarrow +0} e^{-\frac{1}{v}} v^{-x-1} = 0.$$

A mondottaknál fogva a 11) alatti integrálnak  $x$  bármely választása mellett véges és meghatározott értéke van.

Hozzá tehetjük, hogy az általa értelmezett  $Q(x)$  függvény bármely  $a$  hely körül hatványsorba fejthető.

Ha ugyanis a

$$Q(x) = \int_1^{\infty} e^{-u} u^{x-a} u^{a-1} du$$

integrálban  $u^{x-a}$  helyébe az

$$u^{x-a} = e^{(x-a)(l.u)} = 1 + (x-a)(l.u) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} (l.u)^n + \dots$$

sort helyettesítjük, hol  $(l.u)$  az  $u$ -nak valós logaritmus, azután pedig tagonként integrálunk, úgy a következő sort nyerjük:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} \int_1^{\infty} e^{-u} (l.u)^n u^{a-1} du. \quad (12)$$

*E sor együtthatói véges és meghatározott értékűek, továbbá ez a sor  $x$ -nek bármely értéke mellett összetartó és egyenlő  $Q(x)$ -szel.*

Annak bebizonyítása végett, hogy

$$\frac{1}{n!} \int_1^{\infty} e^{-u} (l.u)^n u^{a-1} du \quad (13)$$

véges és meghatározott értékű, alkalmazzuk erre az integrálra az

$$u = \frac{1}{v}$$

helyettesítést. Ekkor

$$(l.u) = -(l.v), \quad u^a = v^{-a}, \quad u^{a-1} du = -v^{a-1} dv,$$

tehát a vizsgálandó integrál a következőbe megy át:

$$\frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 e^{-\frac{1}{v}} (l.v)^n v^{-a-1} dv.$$

Itt az integrálás határai végesek. Továbbá az integrálás határai között és  $v=1$  felső határon az integrálandó függvény folytonos. Vége a  $v=0$  alsó határon

$$\lim_{v \rightarrow +0} e^{-\frac{1}{v}} (l.v)^n v^{-a-1} = 0.$$

Ennélfogva a vizsgált integrálnak valóban véges és meghatározott értéke van.

Ha ezt az értéket  $C_n$ -nel jelöljük, úgy a 12) alatti sor összetartásáról és értékéről mondottakat a következő képletben foglalhatjuk össze:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} C_n (x-a)^n = Q(x).$$

Itt  $Q(x)$ -nek és a limes jele alatti összegnek egymástól való különbsége:

$$\int_1^{\infty} e^{-u} R_N u^{a-1} du,$$

hol

$$R_N = \frac{(x-a)^N}{N!} (l.u)^N + \frac{(x-a)^{N+1}}{(N+1)!} (l.u)^{N+1} + \\ + \frac{(x-a)^{N+2}}{(N+2)!} (l.u)^{N+2} + \dots$$



Ha most  $\rho$  egy  $(x-a)$ -nál nagyobb pozitív számot jelent, akkor

$$\begin{aligned} |R_N| &\leq |x-a|^N \left\{ \frac{(l.u)^N}{N!} + \frac{|x-a|}{(N+1)!} (l.u)^{N+1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{|x-a|^2}{(N+2)!} (l.u)^{N+2} + \dots \right\} < \\ &< \frac{|x-a|^N}{\rho^N} \left\{ \frac{\rho^N}{N!} (l.u)^N + \frac{\rho^{N+1}}{(N+1)!} (l.u)^{N+1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho^{N+2}}{(N+2)!} (l.u)^{N+2} + \dots \right\} < \\ &< \left| \frac{x-a}{\rho} \right|^N u^0. \end{aligned}$$

Ennélfogva

$$\begin{aligned} \left| Q(x) - \sum_{n=0}^{N-1} C_n (x-a)^n \right| &= \left| \int_1^\infty e^{-u} R_N u^{a-1} du \right| < \\ &< \left| \frac{x-a}{\rho} \right|^N \int_1^\infty e^{-u} u^{a+|a|-1} du \end{aligned}$$

vagyis a vizsgált különbség abszolút értéke kisebb mint

$$\left| \frac{x-a}{\rho} \right|^N Q(\rho+|a|).$$

Innen

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| Q(x) - \sum_{n=0}^{N-1} C_n (x-a)^n \right| = 0$$

azaz

$$\sum_{n=0}^{N-1} C_n (x-a)^n$$

limese valóban egyenlő  $Q(x)$ -szel.

7. Ha  $x = x_1 + ix_2$  valós része pozitív, akkor a 10) alatti integrál szintén véges és meghatározott értékű. Ez abban az esetben, midőn  $x_1 \geq 1$ , már az integrálandó függvény folytonosságából következik. Ha pedig  $0 < x_1 \leq 1$ , akkor a parciális integrálás képlete szerint:

$$\int_0^1 e^{-u} u^{x-1} du = \frac{1}{x} [e^{-u} u^x]_{u=0}^1 + \frac{1}{x} \int_0^1 e^{-u} u^x du.$$



Itt a jobb oldal mindkét tagja véges és meghatározott értékű, tehát a bal oldalon álló integrál is olyan.

Ha ellenben  $x_1 \leq 0$ , akkor a vizsgált integrál értéke végtelen vagy határozatlan.

Ha ugyanis  $x$  valós, de negatív értékű, vagy pedig ha  $x=0$ , akkor  $u$ -nak a 0 és 1 közé eső értékeire vonatkozólag

$$u^{x-1} \geq u^{-1}.$$

Továbbá az

$$e^{-u} = 1 - u + \frac{u^2}{1 \cdot 2} - \dots$$

sorból

$$e^{-u} > 1 - u.$$

E két egyenlőtlenséget összesorozván :

$$e^{-u} u^{x-1} > u^{-1} - 1.$$

Tehát  $\delta$  bármely pozitív valódi tört értéke mellett

$$\int_{\delta}^1 e^{-u} u^{x-1} du > \int_{\delta}^1 \left( \frac{1}{u} - 1 \right) du = [l.u - u]_{u=\delta}^1 = \delta - l.\delta - 1,$$

vagyis

$$\int_{\delta}^1 e^{-u} u^{x-1} du > l. \frac{e^{\delta}}{\delta} - 1.$$

Ennélfogva a vizsgált esetben

$$\int_0^1 e^{-u} u^{x-1} du = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 e^{-u} u^{x-1} du = +\infty.$$

Ha pedig  $x = x_1 + ix_2$ , hol  $x_1 \leq 0$  és  $x_2 \geq 0$ , akkor helyettesítsünk a

$$\frac{d}{du} \left( e^{-u} \sum_{k=0}^n f^{(n-k)}(u) \right) = e^{-u} f^{(n+1)}(u) - e^{-u} f(u)$$

azonosságban  $f(u)$  helyébe az

$$\frac{u^{x+n}}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

függvényt,  $n$  helyébe pedig oly nagy számot, hogy  $x_1 + n > 0$ . Ekkor



$$\frac{d}{du} \left\{ e^{-u} u^x \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{x(x+1) \dots (x+k)} \right\} = e^{-u} u^{x-1} - e^{-u} \frac{u^{x+n}}{x(x+1) \dots (x+n)},$$

innen pedig

$$\int_{\delta}^1 e^{-u} u^{x-1} du = \left[ e^{-u} u^x \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{x(x+1) \dots (x+k)} \right]_{u=\delta}^1 + \frac{1}{x(x+1) \dots (x+n)} \int_{\delta}^1 e^{-u} u^{x+n} du.$$

Ha most  $\delta$  minden határon túl kisebbedik, akkor a jobb oldal második tagja véges és meghatározott limeshez közeledik. Ellenben az első tag limese végtelen vagy határozatlan a szerint, hogy  $x$ -nek valós része kisebb a zérusnál vagy pedig egyenlő vele.

Tehát a vizsgált esetben

$$P(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 e^{-u} u^{x-1} du$$

végtelen vagy határozatlan.

8. Ha  $a_1 + ia_2$  valós része pozitív, akkor a 10) alatti integrál segítségével értelmezett  $P(x)$  függvény az  $a$  hely környezetében hatványsorba fejthető.

Ugyanis írjuk a

$$P(x) = \int_0^1 e^{-u} u^{x-a} u^{a-1} dx$$

integrálban  $u^{x-a}$  helyébe az

$$u^{x-a} = e^{-(x-a)(l \cdot \frac{1}{u})} = 1 - (x-a) \left( l \cdot \frac{1}{u} \right) + \dots + (-1)^n \frac{(x-a)^n}{n!} \left( l \cdot \frac{1}{u} \right)^n + \dots$$

sort és integráljunk tagonként.

Az így nyert

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-a)^n}{n!} \int_0^1 e^{-u} \left( l \cdot \frac{1}{u} \right)^n u^{a-1} du \quad (14)$$

sor együtthatói véges és meghatározott értékűek. Ha továbbá  $|x-a| < a_1$ , akkor e sor összetartó és összege  $P(x)$ -szel egyenlő.

Ha  $n$  valamely adott értékére vonatkozólag be akarjuk bizonyítani, hogy

$$\frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-u} \left( l \cdot \frac{1}{u} \right)^n u^{a-1} du \quad (15)$$

véges és meghatározott értékű, úgy ezt  $(n-1)$ -re már bebizonyítottunk tekinthetjük. Ugyanis a legegyszerűbb esetben, midőn  $n=0$ , a 15) alatti integrál átmegy  $P(a)$ -ba.

Márt most, ha  $a_1 > 1$ , a vizsgálandó integrálnak véges és meghatározott volta az integrálandó függvény folytonosságából következik. Ha pedig  $0 < a_1 \leq 1$ , akkor alkalmazzuk a következő képletet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-u} \left( l \cdot \frac{1}{u} \right)^n u^{a-1} du &= \frac{1}{n! a} \left[ e^{-u} \left( l \cdot \frac{1}{u} \right)^n u^a \right]_0^1 + \\ &+ \frac{1}{n! a} \int_0^1 e^{-u} \left( l \cdot \frac{1}{u} \right)^n u^a du + \\ &+ \frac{1}{(n-1)! a} \int_0^1 e^{-u} \left( l \cdot \frac{1}{u} \right)^{n-1} u^{a-1} du. \end{aligned}$$

Itt a jobb oldal minden tagja véges és meghatározott értékű, tehát a bal oldal is olyan.

Ha értékét  $C_n$ -nel jelöljük, úgy a 14) alatti sor összetartásáról és értékéről mondtak a következő képletbe foglalhatók össze:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n C_n (x-a)^n = P(x).$$

Itt

$$P(x) - \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n C_n (x-a)^n = \int_0^1 e^{-u} R_N u^{a-1} du,$$

hol

$$R_N = (-1)^N \frac{(x-a)^N}{N!} \left( l \cdot \frac{1}{u} \right)^N + (-1)^{N+1} \frac{(x-a)^{N+1}}{(N+1)!} \left( l \cdot \frac{1}{u} \right)^{N+1} + \dots$$



Ha most  $|x-a| < \rho < a_1$ , akkor

$$|R_N| < \left| \frac{x-a}{\rho} \right|^N \left\{ \frac{\rho^N}{N!} \left( l \cdot \frac{1}{u} \right)^N + \frac{\rho^{N+1}}{(N+1)!} \left( l \cdot \frac{1}{u} \right)^{N+1} + \dots \right\} < \\ < \left| \frac{x-a}{\rho} \right|^N \frac{1}{u^q}$$

és

$$\left| P(x) - \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n C_n (x-a)^n \right| < \left| \frac{x-a}{\rho} \right|^N \int_0^1 e^{-u} u^{a_1-q-1} du = \\ = \left| \frac{x-a}{\rho} \right|^N P(a_1-\rho).$$

Innen

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| P(x) - \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n C_n (x-a)^n \right| = 0,$$

azaz

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n C_n (x-a)^n$$

valóban egyenlő  $P(x)$ -szel.

9. A  $P(x)$ -ről és  $Q(x)$ -ről mondottak után világos, hogy

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{x-1} du = P(x) + Q(x)$$

akkor és csak akkor bir véges és meghatározott értékkel, ha  $x$  valós része pozitív.

Hozzá tehetjük:

Ha  $a = a_1 + ia_2$  valós része pozitív és az  $a$  körül  $a_1$  sugárral kört írunk le, úgy ennek belsejében

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{x-1} du = \sum_{n=0}^\infty \frac{(x-a)^n}{n!} \int_0^\infty e^{-u} (l \cdot u)^n u^{a-1} du. \quad (16)$$

E sort egyszerűen úgy nyerjük, hogy a  $P(x)$ -re és  $Q(x)$ -re talált sorokat összeadjuk.

10. Most már áttérhetünk annak bebizonyítására, hogy a képzetes számok tengelyétől jobbra eső félsíkban

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{x-1} du = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1)}. \quad (17)$$



Ha  $x$  pozitív értékű, ezt az azonosságot pl. azon az egyszerű és elemi úton bizonyíthatjuk be, melyet KÖNIG GYULA úr a bevezetésben idézett értekezésben követett. Beh bizonyítását ismerve, most már  $x$ -nek a mondott felsikban levő komplex értékeire a kérdéses azonosságot következőleg igazolhatjuk.

Legyen  $x' = x'_1 + ix'_2$  egy tetszőleges komplex szám, azzal az egyetlen megszorítással, hogy  $x'_1 > 0$ . Továbbá jelentsen  $a$  egy igen nagy pozitív számot, oly nagyot, hogy az  $a$ -t ábrázoló pont körül mint középpont körül  $R=a$  sugárral kört rajzolván,  $x'$  e körnek belsejébe essék.

E kör belsejében a 17) alatti egyenletnek mindkét oldala egy-egy  $(x-a)$  hatványai szerint haladó sor alakjában fejezhető ki. E két sorról tudjuk, hogy a rajzolt kör belsejének minden *valós* helyén egyenlők egymással. Tehát az  $a$  hely tetszőleges kis környezetében végtelenül sok oly  $x$  hely található, hol a két sor összege egyenlő. De akkor a két sor azonos egymással, vagyis az egyiknek együtthatói rendre egyenlők a másiknak együtthatóival. Ennélfogva a 17) alatti egyenletnek két oldala a rajzolt körnek belsejében mindenütt, tehát a vizsgált  $x'$  helyen is, valóban egyenlő egymással.

11. A vizsgált  $P(x)$ ,  $Q(x)$  és  $\Gamma(x)$  integrálok közül ugyan csak  $Q(x)$ -nek van  $x$  bármely választása mellett véges és meghatározott értéke, mégis  $P(x)$  és  $\Gamma(x)$  értelmezése is egészen egyszerű módon kiterjeszthető  $x$  minden értékére a nélkül, hogy  $\Gamma(x)$  szorzatalakjára kellene hivatkoznunk.

Ugyanis

$$e^{-u}u^{x-1} = \frac{d}{du} \left( \frac{e^{-u}u^x}{x} \right) + \frac{1}{x} e^{-u}u^x.$$

Tehát ha  $x$  valós része pozitív, úgy

$$\int_0^1 e^{-u}u^{x-1}du = \left[ \frac{e^{-u}u^x}{x} \right]_0^1 + \frac{1}{x} \int_0^1 e^{-u}u^x dx$$

és

$$\int_0^\infty e^{-u}u^{x-1}du = \left[ \frac{e^{-u}u^x}{x} \right]_0^\infty + \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-u}u^x dx.$$



E szerint

$$P(x) = \frac{1}{ex} + \frac{1}{x} P(x+1) \quad (18)$$

és

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1). \quad (19)$$

Ha most azt követeljük, hogy e képletek  $x$  minden értéke mellett érvényesek maradjanak, úgy segítségükkel  $P(x)$  és  $\Gamma(x)$  értelmezését mindenek előtt kiterjeszthetjük arra az esetre, midőn  $x$  valós része 0 és  $-1$  közé esik, azután arra az esetre, midőn  $x$  valós része  $-1$  és  $-2$  közé esik, s i. t. Az eljárást folytatva a két függvény értelmezését fokozatosan kiterjeszthetjük az egész számokra.

Még megjegyezhetjük, hogy  $Q(x)$ -re vonatkozólag hasonló képlet áll fenn. Ugyanis

$$\int_1^{\infty} e^{-u} u^{x-1} du = \left[ \frac{e^{-u} u^x}{x} \right]_1^{\infty} + \frac{1}{x} \int_1^{\infty} e^{-u} u^x du$$

vagyis

$$Q(x) = -\frac{1}{ex} + \frac{1}{x} Q(x+1). \quad (20)$$

Kürschák József.

## DESMIKUS HELYZETŰ TETRAÉDER-RENDSZEREK SÍKMETSZÉSEI.

Mióta STEPHANOS értekezése a «desmikus helyzetű tetraéder-rendszerekről»\* megjelent, több értekezést találunk, mely különböző cím alatt ugyancsak desmikus tetraéder-rendszerek tulajdonságairól szól.\*\* Azonban a rendelkezésemre álló értekezések egyike sem tárgyalja azt a kérdést, hogy a nevezett tetraéder-rendszerek síkmetszései mily idomok lesznek. Célul tűztem tehát magam elé azon síkidomok szerkesztését és tulajdonságainak kiderítését, melyeket egy desmikus helyzetű tetraéder-rendszernek és az ahhoz konjugált tetraéder-rendszernek síkmetszései szolgáltatnak.

Előre jelezhetem, hogy «egy desmikus helyzetű tetraéder-rendszernek metszési idoma egy a tetraéderek irányában általános helyzetű síkkal, oly három négyszög, melynek 12 oldala egymást hármasával 16 pontban metszi.»

1. Jelöljük három *desmikus* tetraédernek  $A, B, C$ -nek szög-pontjait

$$A \equiv A_1 A_2 A_3 A_4, \quad B \equiv B_1 B_2 B_3 B_4, \quad C \equiv C_1 C_2 C_3 C_4$$

gyel; az ezekhez *konjugált* desmikus rendszer  $T_2, T_3, T_4$  tetraédereinek szögpontjait

$$T_2 \equiv E_{12} F_{12} E_{34} F_{34}, \quad T_3 \equiv E_{13} F_{13} E_{24} F_{24}, \quad T_4 \equiv E_{14} F_{14} E_{23} F_{23}$$

mal.

\* STEPHANOS: Sur les systèmes desmiques de trois tétraèdres. (Bulletin des sciences mathématiques, Paris 1872, 2. Série, Tome III.

\*\* Journal f. d. r. u. a. Mathematik. Bd. 109, p. 341.



A két konjugált desmikus tetraéder-rendszer meg van határozva, ha az  $A$  tetraédernek mind a négy szögpontja, a  $B$  tetraédernek pedig egyik, pl. a  $B_1$  szögpontja tetszés szerint lesz felvéve, a nélkül, hogy a  $B_1$  az  $A$  tetraéder valamelyik lapjában feküdne.

Az  $A_i A_j$  élnek és a vele szemben fekvő élnek a  $B_1$  ponton keresztül menő szelője az  $A_i A_j$  élet az  $E_{ij}$  pontban metszi.

Az  $E_{ij}$ ,  $F_{ij}$  pontok az  $A_i$ ,  $A_j$  pontokat harmonikusan választják el.

Az  $E_{1i}$ ,  $E_{jk}$  pontok a  $B_1$ ,  $B_i$  pontokat harmonikusan választják el.

Az  $F_{1i}$ ,  $F_{jk}$  pontok a  $B_j$ ,  $B_k$  pontokat harmonikusan választják el.

A  $C_i$  pont a  $B_1$  pontot az  $A$  tetraéder  $A_i$  szögpontjától és az avval szemben fekvő laptól harmonikusan választja el, s így egyzersmind

$$\begin{aligned} &\text{az } E_{1i}, F_{jk} \text{ pontok a } C_j, C_k \text{ pontokat,} \\ &'' E_{jk}, F_{1i} \quad '' \quad C_1, C_i \quad '' \end{aligned}$$

szintén harmonikusan választják el. E szerint:

$$\begin{aligned} A_1 A_2 &= E_{12} F_{12}, & A_3 A_4 &= E_{34} F_{34}, & A_1 A_3 &= E_{13} F_{13}, \\ B_1 B_2 &= E_{12} E_{34}, & B_3 B_4 &= F_{12} F_{34}, & B_1 B_3 &= E_{13} E_{24}, \\ C_1 C_2 &= E_{34} F_{12}, & C_3 C_4 &= E_{12} F_{34}, & C_1 C_3 &= E_{23} F_{13}, \\ A_2 A_4 &= E_{24} F_{24}, & A_1 A_4 &= E_{14} F_{14}, & A_2 A_3 &= E_{23} F_{23}, \\ B_2 B_4 &= F_{13} F_{24}, & B_1 B_4 &= E_{14} E_{23}, & B_2 B_3 &= F_{14} F_{23}, \\ C_2 C_4 &= F_{13} F_{24}, & C_1 C_4 &= E_{23} F_{14}, & C_2 C_3 &= E_{14} F_{23}. \end{aligned} \quad I)$$

Az  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$  tetraéderek lapjait is egy betűvel akarjuk jelölni, még pedig az  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $E_{ij}$ ,  $F_{ij}$  szögpontokkal szemben fekvő lapokat megfelelőleg  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\varphi_{ij}$ -vel, magukat a tetraédereket még  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$ ,  $\tau_4$ -gyel.

A két konjugált tetraéder-rendszert az  $\alpha$  tetraédernek mind a négy lapja, a  $\beta$  tetraédernek pedig egyik pl.  $\beta_1$  lapja, mely  $\alpha$ -nak egyik szögpontján sem megy keresztül szintén meghatározza.

Az  $\alpha_i \alpha_j$  élnek és a vele szemben fekvő élnek a  $\beta_1$  lapban fekvő szelője az  $\alpha_i \alpha_j$  éllel együtt meghatározza az  $\varepsilon_{ij}$  lapot.



Az  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\varphi_{ij}$  lapok az  $a_i$ ,  $a_j$  lapokat harmonikusan választják el,

$$\begin{array}{llll} \text{" } \varepsilon_{1i}, \varepsilon_{jk} & \text{" } \beta_1, \beta_i & \text{" } & \text{" } \\ \text{" } \varphi_{1i}, \varphi_{jk} & \text{" } \beta_j, \beta_k & \text{" } & \text{" } \end{array}$$

A  $\gamma_i$  lap a  $\beta_1$  lapot az  $a$  tetraéder  $a_i$  lapjától és az avval szemben fekvő  $A_i$  szögpontról harmonikusan választja el, s így egy-szersmind

$$\begin{array}{llll} \text{az } \varepsilon_{1i}, \varphi_{jk} \text{ lapok a } \gamma_j, \gamma_k \text{ lapokat,} \\ \text{" } \varepsilon_{jk}, \varphi_{1i} & \text{" } \gamma_1, \gamma_i & \text{" } & \text{" } \end{array}$$

szintén harmonikusan választják el.

Messük az  $a\beta\gamma$ ,  $\tau_2\tau_3\tau_4$  desmikus tetraéder-rendszerek lapjait egy  $\pi$  sikkal és jelöljük  $a_i\beta_i\gamma_i\varepsilon_{ij}\varphi_{ij}$  lapoknak metszésvonalait a  $\pi$  sikkal rendre  $a_ib_ic_ie_{ij}f_{ij}$  betűkkel. E szerint az

$$\begin{array}{lll} a=a_1a_2a_3a_4, & b=b_1b_2b_3b_4, & c=c_1c_2c_3c_4 \\ t_2=e_{12}f_{12}e_{34}f_{34}, & t_3=e_{13}f_{13}e_{24}f_{24}, & t_4=e_{14}f_{14}e_{23}f_{23} \end{array}$$

négyszögletű oldalak az  $a\beta\gamma$ ,  $\tau_2\tau_3\tau_4$  tetraéderek lapjainak metszései a  $\pi$  sikkal.

Az  $abc$  és a  $t_2t_3t_4$  négyszögletű oldalakat egy desmikus rendszert alkotó, vagy röviden *desmikus négyszögletű oldalnak*, a két rendszerét e desmikus négyszögletű oldalnak, *konjugált* desmikus rendszernek akarjuk nevezni.

Minthogy az

$$\begin{array}{llll} a_1\beta_1\gamma_1, & a_1\beta_2\gamma_2, & a_1\beta_3\gamma_3, & a_1\beta_4\gamma_4 \\ a_2\beta_1\gamma_2, & a_2\beta_2\gamma_1, & a_2\beta_3\gamma_4, & a_2\beta_4\gamma_3 \\ a_3\beta_1\gamma_3, & a_3\beta_2\gamma_4, & a_3\beta_3\gamma_1, & a_3\beta_4\gamma_2 \\ a_4\beta_1\gamma_4, & a_4\beta_2\gamma_3, & a_4\beta_3\gamma_2, & a_4\beta_4\gamma_1 \end{array}$$

lapok, és az

$$\begin{array}{llll} \varphi_{34}\varphi_{24}\varphi_{23}, & \varphi_{34}\varepsilon_{23}\varepsilon_{24}, & \varphi_{23}\varepsilon_{23}\varepsilon_{34}, & \varphi_{23}\varepsilon_{34}\varepsilon_{24} \\ \varphi_{34}\varphi_{13}\varphi_{14}, & \varphi_{34}\varepsilon_{14}\varepsilon_{13}, & \varphi_{13}\varepsilon_{14}\varepsilon_{34}, & \varphi_{14}\varepsilon_{34}\varepsilon_{13} \\ \varphi_{12}\varphi_{24}\varphi_{14}, & \varphi_{12}\varepsilon_{14}\varepsilon_{24}, & \varphi_{24}\varepsilon_{14}\varepsilon_{12}, & \varphi_{14}\varepsilon_{12}\varepsilon_{24} \\ \varphi_{12}\varphi_{13}\varphi_{23}, & \varphi_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{13}, & \varphi_{13}\varepsilon_{23}\varepsilon_{12}, & \varphi_{23}\varepsilon_{12}\varepsilon_{13} \end{array}$$



lapok egymást egy-egy egyenesben metszik, azért az  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ ,  $t_4$  négyoldalaknak

$$\begin{array}{cccc} a_1 b_1 c_1, & a_1 b_2 c_2, & a_1 b_3 c_3, & a_1 b_4 c_4 \\ a_2 b_1 c_2, & a_2 b_2 c_1, & a_2 b_3 c_4, & a_2 b_4 c_3 \\ a_3 b_1 c_3, & a_3 b_2 c_4, & a_3 b_3 c_1, & a_3 b_4 c_2 \\ a_4 b_1 c_4, & a_4 b_2 c_3, & a_4 b_3 c_2, & a_4 b_4 c_1 \end{array} \quad \text{II)}$$

$$\begin{array}{cccc} f_{34} f_{24} f_{23}, & f_{34} e_{23} e_{24}, & f_{24} e_{23} e_{34}, & f_{23} e_{34} e_{24} \\ f_{34} f_{13} f_{14}, & f_{34} e_{14} e_{13}, & f_{13} e_{14} e_{34}, & f_{14} e_{34} e_{13} \\ f_{12} f_{24} f_{14}, & f_{12} e_{14} e_{24}, & f_{24} e_{14} e_{12}, & f_{14} e_{12} e_{24} \\ f_{12} f_{13} f_{23}, & f_{12} e_{23} e_{13}, & f_{13} e_{23} e_{12}, & f_{23} e_{12} e_{13} \end{array} \quad \text{III)}$$

oldalai egymást egy-egy pontban fogják metszeni.

Az  $abc$  négyoldalak mindegyike négy háromszögre bontható fel. E tizenkét háromszög közül bármely kettő, mely két különböző négyoldalból lett leszármaztatva, egymással és még a harmadik négyoldalból leszármaztatott háromszöggel ugyanarra a kollineáció középpontra vonatkozólag perspektív; a kollineáció-tengelyek az  $abc$  négyoldalaknak kimaradt oldalai, a megfelelő szögpontokat projicziáló három sugár pedig, a konjugált  $t_2 t_3 t_4$  négyoldalaknak egymást egy pontban metsző oldalai.

Ha az  $abc$  négyoldalaknak három egymást egy pontban metsző oldalából, mint három kollineáció-tengelyből indulunk ki, tehát az

$$a_1 b_1 c_1, \quad a_1 b_i c_i, \quad a_i b_1 c_i, \quad a_i b_i c_1, \quad \text{vagy} \quad a_i b_j c_k$$

ból, akkor megfelelőleg a perspektív háromszögek:

$$\begin{array}{cccccc} a_2 a_3 a_4, & a_i a_j a_k, & a_1 a_j a_k, & a_1 a_j a_k, & a_1 a_j a_k \\ b_2 b_3 b_4, & b_1 b_k b_j, & b_i b_k b_j, & b_1 b_j b_k, & b_k b_i b_1 \\ c_2 c_3 c_4, & c_1 c_k c_j, & c_i c_j c_k, & c_i c_k c_j, & c_j c_1 c_i, \end{array} \quad \text{IV)}$$

hol az egyes oszlopokban felírt oldalak felelnek meg egymásnak. E háromszögekhez tartozó projicziáló sugarak pedig

$$f_{23} f_{34} f_{42}, \quad e_{ij} f_{jk} e_{ki}, \quad f_{1j} f_{jk} f_{k1}, \quad e_{1j} f_{jk} e_{k1}, \quad f_{1j} e_{jk} e_{k1}.$$

Ha ellenben ezeket a projicziáló sugarakat, mint a  $t_2 t_3 t_4$  négy-



oldaloknak egymást egy pontban metsző oldalait tekintjük kollineáció-tengelyeknek, akkor a perspektív háromszögek:

$$\begin{array}{llllll} e_{14} e_{23} f_{14}, & e_{1k} f_{1k} f_{1j}, & e_{ki} e_{1i} f_{ki}, & e_{ki} f_{ki} f_{1j}, & f_{ik} e_{ki} e_{1j} \\ e_{12} e_{34} f_{12}, & f_{1i} e_{1i} e_{jk}, & e_{1i} e_{kj} f_{1i}, & f_{1i} e_{1i} e_{jk}, & e_{1i} f_{1i} f_{jk} \\ e_{13} e_{24} f_{13}, & e_{1j} f_{1j} f_{ki}, & e_{ji} e_{1k} f_{ji}, & e_{ji} f_{ji} f_{1k}, & e_{ji} f_{ji} f_{1k} \end{array} \quad \text{V)}$$

és a projicziáló sugarak az előbbi  $a_1 b_1 c_1$ , stb. kollineáció-tengelyek lesznek.

Az V. táblázat első csoportjában levő háromszögeknek oldalai, még az

$$e_{34} f_{12} e_{12}$$

$$e_{24} f_{13} e_{13}$$

$$e_{23} f_{14} e_{14}$$

háromszögeknek is oldalai, melyek az  $a_1 b_1 c_1$  kollineáció-tengelyekre és az  $f_{23} f_{34} f_{12}$  projicziáló sugarakra vonatkozólag perspektívek. E háromszögek a IV. táblázat első csoportjában álló  $a_2 a_3 a_4$ ,  $b_2 b_3 b_4$ ,  $c_2 c_3 c_4$  háromszögek körül vannak írva, s e kívül oldalai ezeknek két-két oldalát az  $f_{23}$ ,  $f_{34}$ ,  $f_{12}$  projicziáló sugaraktól, és ezeknek szögpontjai amazoknak két-két szögpontját az  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  kollineáció-tengelyektől harmonikusan választják el.

Az  $a_1 b_1 c_1$ ,  $f_{23} f_{34} f_{24}$  egyeneseken, úgy az  $abc$  négyoldalnak, mint a  $t_2 t_3 t_4$  négyoldalnak 18 szögpontja rajta van, és az első három, valamint az utóbbi három egyenes egymást egy-egy pontban metszi. A konfigurációnak ily két pontját, mint  $(a_1 b_1 c_1)$ ,  $(f_{23} f_{34} f_{24})$ , melyeken keresztül menő hat egyenes a két konjugált desmikus négyoldal-rendszer kétszer 18 szögpontját tartalmazza *ellenpontnak* vagy *ellenpontpárnak* nevezhetjük. Az egész konfiguráczó ellenpontpárjainak száma 16.

Ezek után a talált eredményt következő tételbe foglaljuk össze:

*Három desmikus tetraédernek és a hozzájuk konjugált három desmikus tetraédernek metszése egy síkkal: három desmikus négyoldal és az ezekhez konjugált desmikus négyoldal.*

*Három desmikus négyoldal oly helyzetű, hogy az első s a második négyoldal egy oldalának metszéspontján a harmadik*



négyszögnek egy oldala keresztül megy, azaz a három desmikus négyszög 12 oldala egymást hármassával 16 pontban metszi.

A három desmikus négyszögnek, három egymást egy pontban metsző oldala, kollineáció-tengelye három páronként perspektív háromszögnek, melyeknek oldalai a desmikus négyszögeknek többi három-három oldala, a megfelelő szögpontokat projiciáló három közös sugár pedig a konjugált desmikus négyszögeknek egymást egy pontban metsző három oldala.

Desmikus négyszögeket tehát, a konjugált desmikus négyszögeknek három-három egymást egy pontban metsző oldala 16-féleképen egészítheti ki Hesse-féle ( $15_4$ ,  $20_3$ ) konfigurációkká.

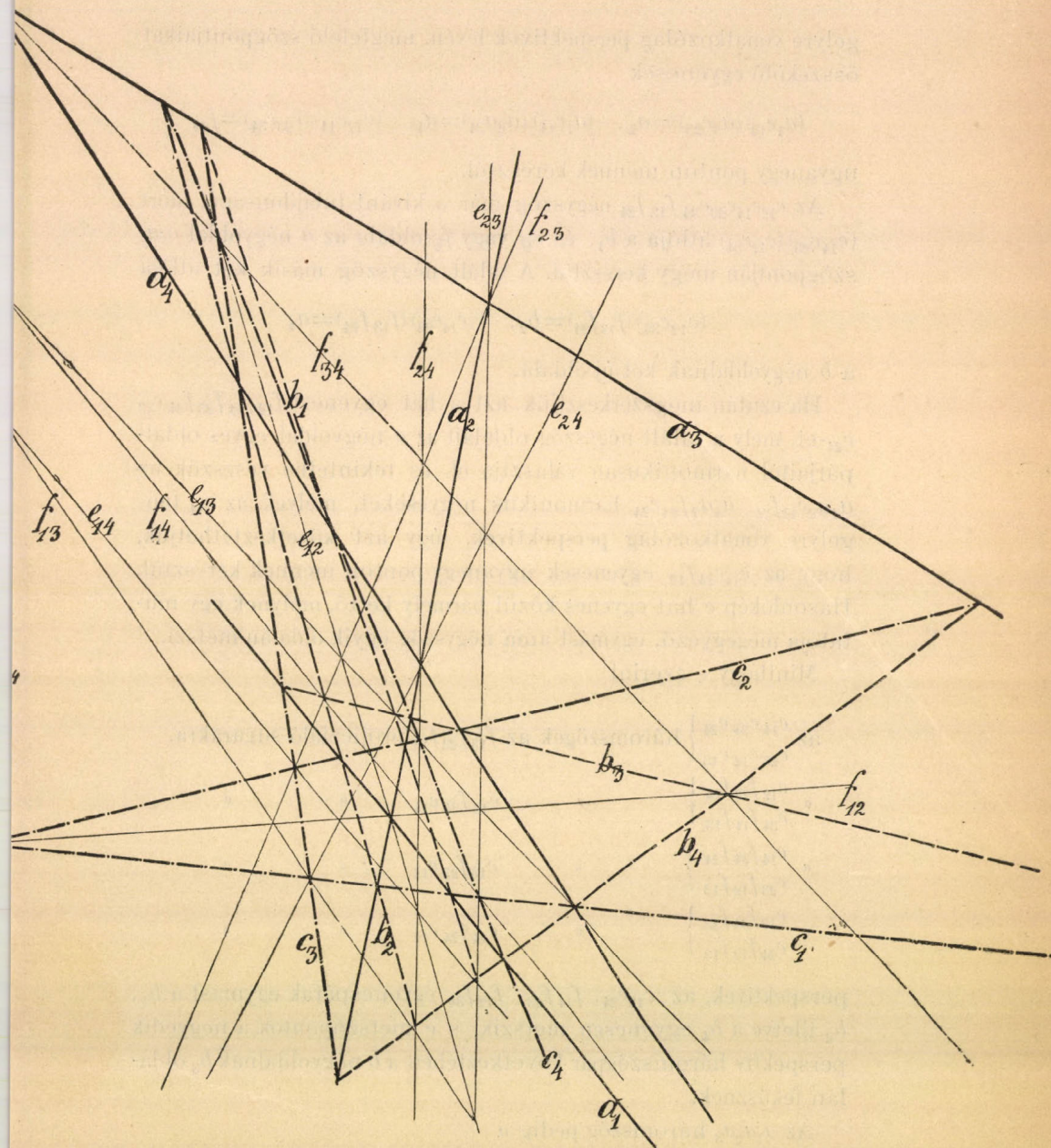
Bármely ily konfigurációban a konjugált desmikus négyszögeknek többi kilencz oldala szintén három ugyanarra a kollineáció-tengelyekre és projiciáló sugarakra vonatkozó perspektív háromszöget képez, melyeknek oldalai amazoknak két-két oldalát a projiciáló sugaraktól, s melyeknek két-két szögpontja amazoknak szögpontjait a kollineáció-tengelyektől harmonikusan választja el.

3. Hogy az  $a = a_1a_2a_3a_4$  négyszöghöz még két négyszöget  $b = b_1b_2b_3b_4$ ,  $c = c_1c_2c_3c_4$ -et szerkesztthessünk, mely ugyanavval egy desmikus négyszögrendszer képez (1. ábra), a  $b$ -nek még egyik, pl.  $(b_1b_2)$  szögpontját és azon keresztül menő  $b_1$  oldalát tetszés szerint lehet felvenni, a nélkül azonban, hogy az  $a$ -nak egyik szögpontja a  $b_1$ -en feküdne.

Az  $a$  négyszög körül írunk egy oly négyszöget, melynek egyik átlója a  $b_1$  és egyik átlópontja a  $(b_1b_2)$ .

E végből az  $(a_1a_2)$ ,  $(a_3a_4)$  ponton keresztül egymást a  $(b_1b_2)$  pontban metsző  $e_{12}$ ,  $e_{34}$  egyeneseket húzunk. A  $b_1$ -en fekvő pontsora az  $(a_2a_3)$ ,  $(a_1a_4)$  szögpontokból projiciáló sugársorok az  $e_{12}$ ,  $e_{34}$  egyeneseket megfelelőleg két projektív pontsorból metszik, melyek, minthogy az  $(e_{12}e_{34})$ -ben megfelelő pontjuk van, perspektívek. Ennélfogva e két perspektív pontsorból projiciáló sugársor középpontját az  $(a_1a_3)$  ponttal összekötő  $f_{13}$  egyenes oly helyzetű, hogy abban az  $e_{14}$ ,  $e_{34}$  és az  $e_{12}$ ,  $e_{23}$  egyenesek egymást metszik. Az  $a_1e_{12}e_{14}$ ,  $a_3e_{23}e_{34}$  háromszögek pedig az  $f_{13}$  kollineáció-ten-







gelyre vonatkozólag perspektívek lévén, megfelelő szögpontjaikat összekötő egyenesek

$$(a_1 e_{12})(a_3 e_{23}) = a_2, \quad (a_1 e_{14})(a_3 a_{34}) = a_4, \quad (e_{12} e_{14})(e_{23} e_{34}) = f_{24}$$

ugyanegy ponton mennek keresztül.

Az  $e_{12} e_{14} e_{23} e_{34} f_{13} f_{24}$  négyszög már a kívánt tulajdonságú, mert  $(e_{14} e_{23})(e_{12} e_{34})$  átlója a  $b_1$ , és  $e_{ij}$  vagy  $f_{ij}$  oldala az  $a$  négyoldal  $a_i a_j$  szögpontján megy keresztül. A talált négyszög másik két átlója

$$(e_{12} e_{34})(f_{13} f_{24}) = b_2, \quad (e_{14} e_{23})(f_{13} f_{24}) = a_4$$

a  $b$  négyoldalnak két új oldala.

Ha ezután megszerkesztjük azt a hat egyenest  $f_{12} f_{14} f_{23} f_{34} e_{13} e_{24}$ -et, mely a talált négyszög oldalait az  $a$  négyoldal egyes oldalpárjaitól harmonikusan választja el, és tekintetbe vesszük az  $a_1 a_2 e_{12} f_{12}$ ,  $a_4 a_2 f_{24} e_{24}$  harmonikus négyeseket, melyek az  $e_{14}$  tengelyre vonatkozólag perspektívek, úgy azt következtethetjük, hogy az  $e_{14} e_{24} f_{12}$  egyenesek ugyanegy ponton mennek keresztül. Hasonlóképp e hat egyenes közül bármely kettő, melynek egy mutatója megegyező, egymást ama négyszög egyik oldalán metszi.

Mintthogy e szerint

$$\begin{array}{ll} \text{az } \left. \begin{array}{l} e_{14} e_{34} e_{24} \\ e_{23} e_{12} e_{13} \end{array} \right\} & \text{háromszögek az } f_{13} f_{23} f_{12} \text{ projicziáló sugarakra,} \\ \left. \begin{array}{l} e_{12} f_{23} f_{24} \\ e_{34} f_{14} f_{13} \end{array} \right\} & \text{" } e_{13} f_{34} e_{14} \text{ " " " } \\ \left. \begin{array}{l} e_{14} f_{34} f_{24} \\ e_{23} f_{12} f_{13} \end{array} \right\} & \text{" } e_{13} f_{23} e_{12} \text{ " " " } \\ \left. \begin{array}{l} e_{13} f_{34} f_{23} \\ e_{24} f_{12} f_{13} \end{array} \right\} & \text{" } e_{14} f_{24} e_{12} \text{ " " " } \end{array}$$

perspektívek, az  $e_{13} e_{24}$ ,  $f_{14} f_{23}$ ,  $f_{12} f_{34}$  egyenespárok egymást a  $b_1$ ,  $b_2$  illetve a  $b_4$  egyenesen metszik, s e metszőpontok a negyedik perspektív háromszögpár következtében a  $b$  négyoldalnak  $b_3$  oldalán fekszenek.

Az  $a_1 a_2 a_3$  háromszög pedig a

$$b_1 b_2 b_3, \quad b_2 b_1 b_4, \quad b_3 b_4 b_1, \quad b_4 b_3 b_2$$



háromszögekkel az

$$(e_{12}f_{23}e_{31}), (e_{12}e_{23}f_{32}), (f_{12}e_{23}e_{31}), (f_{12}f_{23}f_{31})$$

kollineáció-középpontokra és a  $c$  négyoldal

$$c_1, c_2, c_3, c_4$$

oldalaira vonatkozólag perspektív.

4. Jóval egyszerűbb a desmikus négyoldalak szerkesztése, ha az  $a$  négyoldalnak csak három oldalát, pl.  $a_2a_3a_4$ -et, a  $b$  négyoldalnak pedig két oldalát,  $b_2, b_3$ -mat és a  $(b_3b_4)$  szögpontját tet-szőlegesen veszszük fel.

Ugyanis az  $(a_2b_2), (a_3b_3); (a_2a_3), (b_2b_3); (a_3a_4), (b_3b_4)$  pontpárokat összekötő egyenesek  $c_1, f_{23}, f_{34}$ ; az  $(a_2a_4)(f_{23}f_{34})=f_{24}$  egyenes a  $b_2$  a  $(b_2b_4)$ -ben metszi és  $(b_2b_4)(b_3b_4)=b_4$ .

Az  $a_2a_3a_4, b_2b_3b_4$  perspektív háromszögekből a  $c$  négyoldalnak hiányzó  $c_2c_3c_4$  oldalai pedig következőképen adódnak ki:

$$(a_3b_4)(a_4b_3)=c_2, (a_4b_2)(a_2b_4)=c_3, (a_2b_3)(a_3b_2)=c_4;$$

és az  $a_2a_3a_4, c_2c_3c_4; b_2b_3b_4, c_2c_3c_4$  perspektív háromszögeknek  $b_1, a_1$  kollineáció-tengelyei a  $b$  és  $a$  négyoldaloknak hiányzó oldalai.

Végre az a kilencz egyenes, mely az  $f_{23}, f_{24}, f_{34}$  projicziáló sugarakat, az  $a_2a_3a_4, b_2b_3b_4, c_2c_3c_4$  háromszögek oldalpárjaitól harmonikusan választja el, a projicziáló sugarakkal együtt a konjugált desmikus négyoldal-rendszer oldalait képezi.

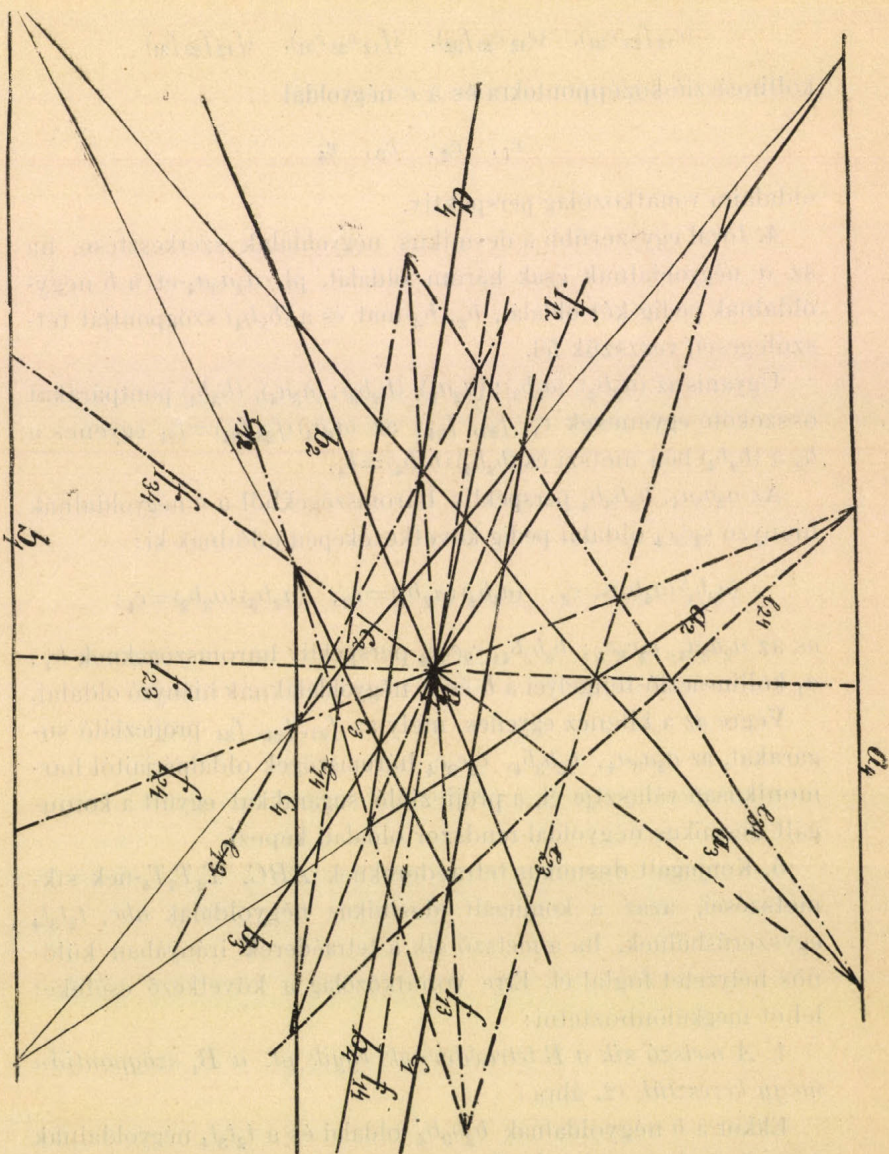
5. Konjugált desmikus tetraédereknek  $ABC, T_2T_3T_4$ -nek síkmetszései, azaz a konjugált desmikus négyoldalak  $abc, t_2t_3t_4$  egyszerűsbülnek, ha a metsző sík a tetraéderek irányában különös helyzetet foglal el. Erre vonatkozólag a következő eseteket lehet megkülönböztetni:

1. A metsző sík a  $B$  tetraédernek egyik pl. a  $B_1$  szögpontján megy keresztül. (2. ábra.)

Ekkor a  $b$  négyoldalnak  $b_2b_3b_4$  oldalai és a  $t_2t_3t_4$  négyoldalnak  $f_{12}f_{34}f_{13}f_{24}f_{14}f_{23}$  oldalai a  $B_1$  ponton mennek keresztül; a  $b$  négyoldal tehát elfajul, a többi öt négyoldal nem fajul el.

Minthogy az  $A=a=a_1a_2a_3a_4, C=\gamma=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$  tetraéderek a

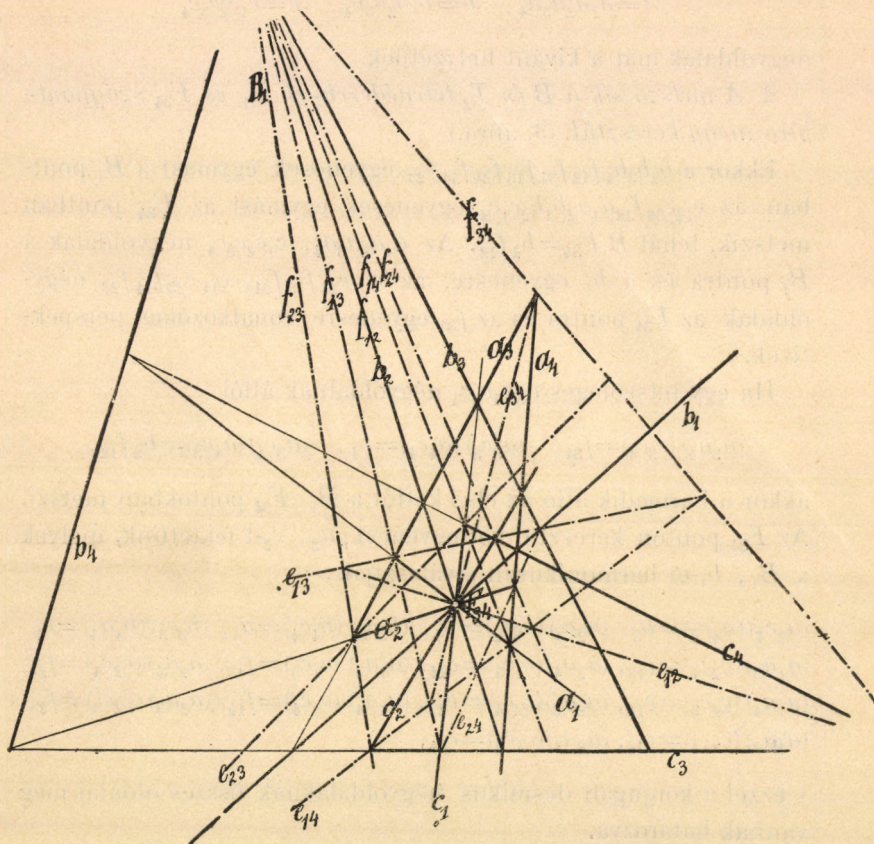




2. ábra.



$B_1$  pontra és a  $\beta_1$  síkra vonatkozólag involucziós fekvésűek, azért az  $a = a_1 a_2 a_3 a_4$ ,  $c = c_1 c_2 c_3 c_4$  négyoldalak a  $B_1$  pontra és a  $b_1$  tengelyre vonatkozólag szintén involucziós fekvésűek lesznek. A  $b_2 f_{34}$ ,  $b_3 f_{24}$ ,  $b_4 f_{23}$  sugárpárok pedig, melyek az  $a_2 a_3 a_4 c_1$ ,  $c_2 c_3 c_4 a_1$



3. ábra.

négyoldalaknak szögpontjait projecziálják involucziót képeznek a  $B_1$  sugársorban.

Ha két háromszöget  $a_2 a_3 a_4$ ,  $c_2 c_3 c_4$ -et szerkesztünk, melyek a  $B_1$  pontra és a  $b_1$  egyenesre vonatkozólag involucziós fekvésűek, akkor a

$$b_2 = (a_3 c_4) (a_4 c_3), \quad b_3 = (a_4 c_2) (a_2 c_4), \quad b_4 = (a_2 c_3) (a_3 c_2)$$



egyenesek a  $B_1$  ponton mennek keresztül; az

$$a_1 = (b_2 c_2) (b_3 c_3) (a_4 b_4), \quad c_1 = (b_2 a_2) (b_3 a_3) (b_4 a_4)$$

egyenesek egymást a  $b_1$ -en metszik, és az

$$a = a_1 a_2 a_3 a_4, \quad b = b_1 b_2 b_3 b_4, \quad c = c_1 c_2 c_3 c_4$$

négyszögek már a kívánt helyzetűek.

2. A metsző sík a  $B$  és  $T_2$  tetraédereknek  $B_1$  és  $F_{34}$  szögpontjain megy keresztül. (3. ábra.)

Ekkor a  $b_2 b_3 b_4 f_{12} f_{34} f_{13} f_{24} f_{14} f_{23}$  egyenesek egymást a  $B_1$  pontban, az  $e_{12} e_{34} f_{12} a_1 a_2 b_1 b_3 c_1 c_2$  egyenesek egymást az  $F_{34}$  pontban metszik, tehát  $B_1 F_{34} = b_2 f_{12}$ . Az  $a_1 a_2 a_3 a_4$ ,  $c_1 c_2 c_3 c_4$  négyszögek a  $B_1$  pontra és a  $b_1$  egyenesre, az  $e_{13} e_{24} f_{13} f_{24}$ ,  $e_{14} e_{23} f_{14} f_{23}$  négyszögek az  $F_{34}$  pontra és az  $f_{34}$  egyenesre vonatkozólag perspektiviek.

Ha egy tetszőleges  $a_3 a_4 c_3 c_4$  négyszögnek átlói

$$(a_3 a_4) (c_3 c_4) = f_{34}, \quad (a_3 c_3) (a_4 c_4) = b_1, \quad (a_3 c_4) (a_4 c_3) = b_2 f_{12},$$

akkor a harmadik átló az első kettőt a  $B_1$ ,  $F_{34}$  pontokban metszi. Az  $F_{34}$  ponton keresztül két egyenest,  $a_2$ ,  $c_2$ -t fektetünk, melyek a  $B_1$ ,  $b_1$ -et harmonikusan elválasztják;

$$\begin{aligned} (a_2 c_4) (a_4 c_2) &= b_3, & (a_2 c_3) (a_3 c_2) &= b_4, & (b_3 c_3) (b_4 c_4) &= a_1, & (b_3 c_3) (b_4 a_4) &= c_1 \\ (a_1 a_3) (c_2 c_4) &= e_{13}, & (a_2 a_4) (c_1 c_3) &= e_{24}, & (a_1 a_3) (c_1 c_3) &= f_{13}, & (a_2 a_4) (c_2 c_4) &= f_{24}, \\ (a_1 a_4) (c_2 c_3) &= e_{14}, & (a_2 a_3) (c_2 c_4) &= e_{23}, & (a_1 a_4) (c_1 c_4) &= f_{14}, & (a_2 a_3) (c_2 c_3) &= f_{23}, \\ (a_1 a_2) (c_3 c_4) &= e_{12}, & (a_3 a_4) (c_1 c_2) &= e_{34}, \end{aligned}$$

s ezzel a konjugált desmikus négyszögeknek összes oldalai megvannak határozva.

3. A metsző sík a  $B$  tetraédernek  $B_1 B_2$  élén, tehát egyszersmind a  $T_2$  tetraédernek  $E_{12} E_{34}$  élén is keresztül megy. (4. ábra.)

Ekkor

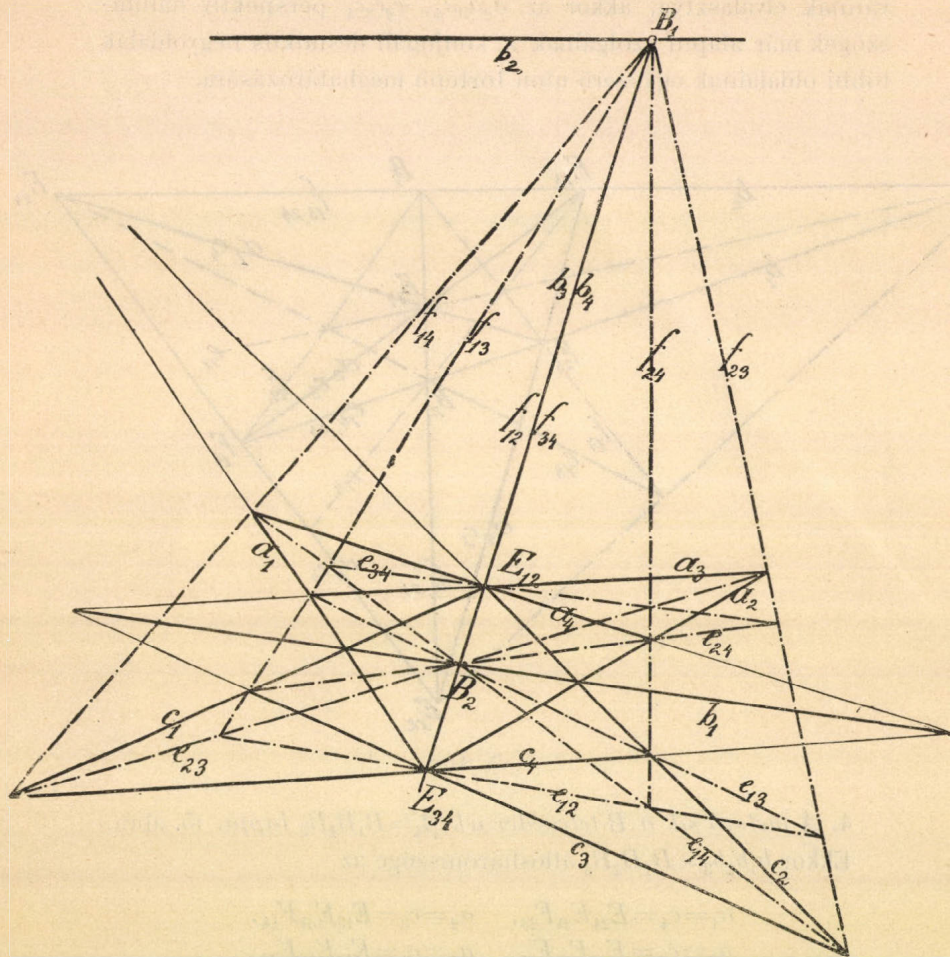
$$B_1 B_2 = E_{12} E_{34} = b_3 b_4 = f_{12} f_{34};$$

az  $a$ ,  $c$ ,  $t_3$ ,  $t_4$  négyszögeknek  $(a_1 a_2)$ ,  $(c_3 c_4)$ ;  $(a_3 a_4)$ ,  $(c_1 c_2)$ ;  $(f_{13} f_{24})$ ,  $(f_{14} f_{23})$ ;  $(e_{13} e_{24})$ ,  $(e_{14} e_{23})$  szögpontjai megfelelőleg az  $E_{34}$ ,  $E_{12}$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  pontokkal egyesülnek.



Az

$$a_1 a_2 a_3 a_4, \quad c_1 c_2 c_3 c_4; \quad a_1 a_2 a_3 a_4, \quad c_2 c_1 c_4 c_3; \\ c_{13} c_{24} f_{13} f_{24}, \quad f_{14} f_{23} c_{14} c_{23}; \quad c_{13} c_{24} f_{13} f_{24}, \quad f_{23} f_{14} c_{23} c_{14}$$



4. ábra.

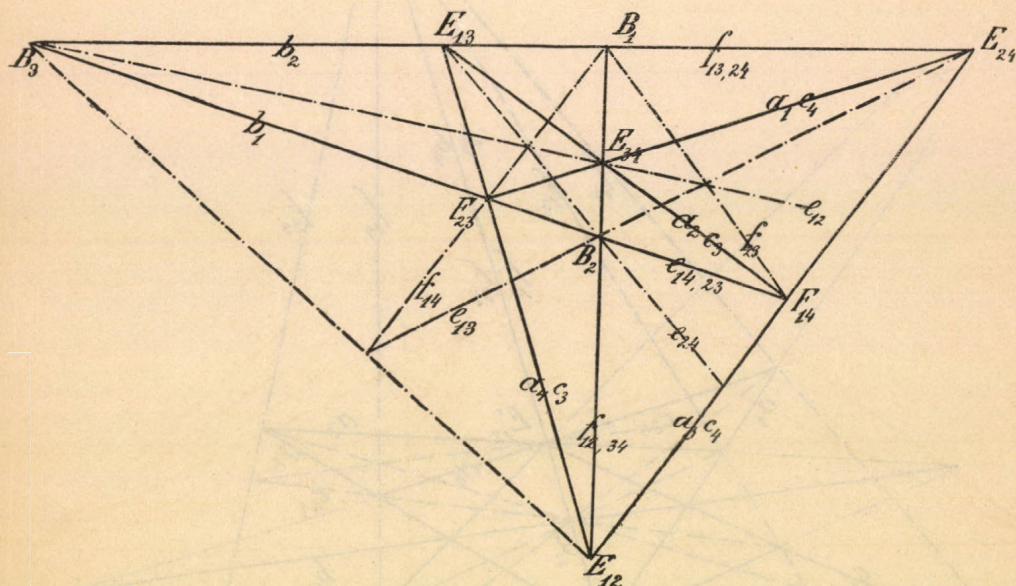
négyszögpárok megfelelőleg a  $B_1, b_1; B_2, b_2; E_{34}, c_{34}; E_{12}, e_{12}$  pontokra és egyenesekre vonatkozólag involúciós fekvésűek.

Ha egy  $a_2 a_4 c_2 c_4$  négyszögnak átlói

$$(a_2 c_2)(a_4 c_4) = b_1, \quad (a_2 a_4)(c_2 c_4) = f_{24}, \quad (a_2 c_4)(a_4 c_2) = b_3 b_4 = f_{12} f_{34},$$



akkor az első két átló az utóbbit a  $B_2$ ,  $B_1$  pontokban metszi. Ha továbbá az  $(a_2c_4)=E_{34}$ ,  $(a_4c_2)=E_{12}$  pontokon keresztül oly  $c_3$ , illetve  $a_3$  egyeneseket húzunk, melyek  $B_1$ ,  $b_1$ -től harmonikusan vannak elválasztva, akkor az  $a_2a_3a_4$ ,  $c_2c_3c_4$  perspektív háromszögek már alapul szolgálnak a konjugált desmikus négyszögek többi oldalainak egyszerű uton történő meghatározására.



5. ábra.

4. A metsző sík a  $B$  tetraédernek  $\beta_4=B_1B_2B_3$  lapja. (5. ábra.)

Ekkor  $b_1b_2b_3=B_1B_2B_3$  átlósháromszöge az

$$\begin{aligned} a_1=c_4 &= E_{24}E_{34}F_{23}, & a_2=c_3 &= E_{13}E_{34}F_{14}, \\ a_3=c_2 &= E_{12}E_{24}F_{14}, & a_4=c_1 &= E_{12}E_{13}F_{23} \end{aligned}$$

oldalakból alkotott  $a \equiv c$  négyszögeknek;  $b_4$  pedig határozatlan. Az  $e_{13}e_{24}e_{12}e_{34}f_{14}f_{23}$  négyszög az előbbi  $a \equiv c$  négyszög körül van írva, átlósháromszöge  $b_1b_2b_3$ , melynek oldalain az  $e_{12}e_{23}$ ,  $f_{13}f_{24}$ ,  $f_{12}f_{34}$  egyenesek egyesülnek.

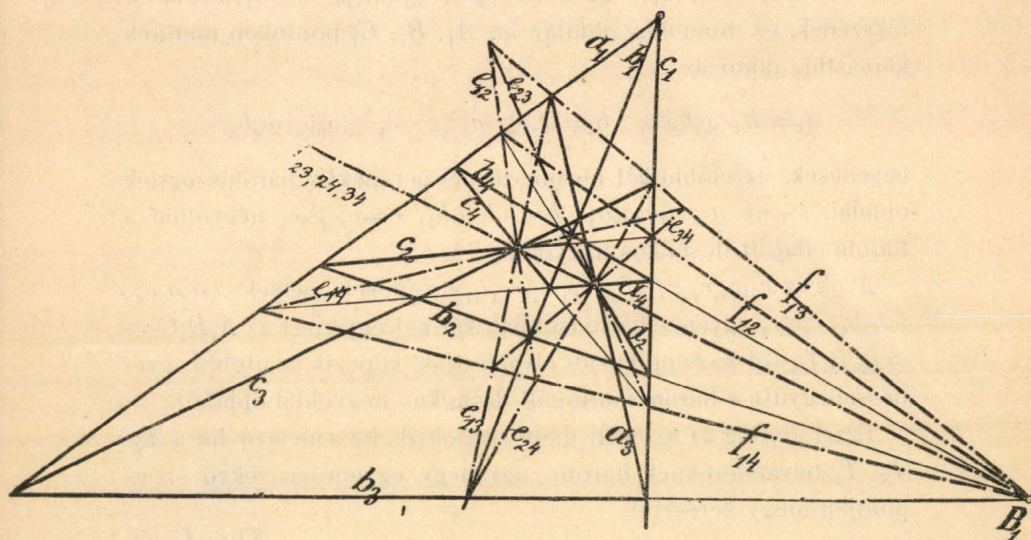
4a) Ha a metsző sík a  $T_2$  tetraédernek  $E_{12}E_{34}F_{12}$  lapja, tehát



az  $A, B, C$  tetraédereknek  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  szögpontjain megy keresztül, akkor

$$\begin{aligned} F_{12}E_{12} &= c_{34}a_3a_4, & E_{12}E_{34} &= f_{12}b_3b_4, & E_3F_{12} &= c_{12}c_3c_4, \\ A_1B_1C_1 &= f_{23}f_{24}, & A_1B_2C_2 &= c_{23}c_{24}, & A_2B_1C_2 &= f_{13}f_{14}, & A_2B_2C_1 &= c_{13}c_{12}, \\ A_2E_{34} &= a_1, & A_1E_{34} &= a_2, & C_2E_{12} &= c_1, & C_1E_{12} &= c_2, \\ B_2F_{12} &= b_1, & B_1F_{12} &= b_2, \end{aligned}$$

vége  $f_{34}$  határozatlan.



6. ábra.

5.  $A$  metsző sík az  $A_1B_1C_1$  egyenesen megy keresztül. (6. ábra.)

Ebben az esetben  $A_1B_1C_1 = f_{23}f_{24}f_{34}$ ;

az  $a_2a_3a_4e_{34}e_{24}e_{23}$  egyenesek az  $A_1$  ponton

a  $b_2b_3b_4f_{12}f_{13}f_{14}$  "  $B_1$  "

a  $c_2c_3c_4e_{12}e_{13}e_{14}$  "  $C_1$  "

mennek keresztül, és az  $A_1B_1C_1$  pontok az  $a_1b_1c_1$  egyenesek között kettőt-kettőt a harmadiktól harmonikusan választják el.

Az  $a, b, c$  négyszögek elfajulnak, a  $t_2, t_3, t_4$  négyszögek pedig nem fajulnak el; azoknak az  $a_2b_2c_2, a_3b_3c_3, a_4b_4c_4$  oldalaiól alko-



tott háromszögek, emezeknek pedig az  $e_{13}f_{12}e_{12}$ ,  $e_{24}f_{13}e_{13}$ ,  $e_{23}f_{14}e_{14}$  oldalaiból képezett háromszögek perspektívek, mert megfelelő oldalai az  $A_1B_1C_1$  pontokon mennek keresztül és megfelelő szögpontjai az  $a_1b_1c_1$  egyeneseken fekszenek.

Ha egy ponton keresztül  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  egyenest húzunk, és egy egyenesen azt a három pontot  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ -et megszerkesztjük, mely ama egyenesek közül kettőt-kettőt a harmadiktól harmonikusan választ el, ha továbbá oly két háromszöget  $a_2b_2c_2$ ,  $a_3b_3c_3$ -mat szerkesztünk, melynek homolog szögpontjai az  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ -en fekszenek, és homolog oldalai az  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  pontokon mennek keresztül, akkor az

$$a_4 = (b_3c_2)(b_2c_3), \quad b_4 = (c_3a_2)(a_3c_2), \quad c_4 = (a_3b_2)(a_2b_3)$$

egyenesek, az előbbi két háromszöggel perspektív háromszögnek oldalai, és az  $a = a_1a_2a_3a_4$ ,  $b = b_1b_2b_3b_4$ ,  $c = c_1c_2c_3c_4$  négyszög a három elfajult desmikus négyszög.

Azok az  $e_{34}e_{24}e_{23}$ ,  $f_{12}f_{13}f_{14}$ ,  $e_{12}e_{13}e_{14}$  egyenesek, melyek az  $a_2a_3a_4$ ,  $b_2b_3b_4$ ,  $c_2c_3c_4$  egyenes hármassokban két-két egyenest az  $A_1B_1C_1 = f_{23}f_{24}f_{34}$ -től harmonikusan elválasztják, képezik az utóbbi egyenessel együtt a három konjugált desmikus négyszög oldalait.

Ezzel analog az az eset, mely származik, ha a metsző sík a  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$  tetraédereknek három, ugyanegy egyenesen fekvő szögpontján megy keresztül.

*Klug Lipót.*



## A KONDENZÁTOR HATÁSA AZ ELEKTROLYTIKUS MEGSZAKÍTÓNÁL.

A WEHNELT-féle elektrolitikus megszakító működésében különösen az tűnt fel nekem, hogy oly gyors megszakítások mellett a vezeték önindukciója semmi ellenállást nem fejt ki, teljesen ellensúlyozva van ; másrészt a megszakító működésének alapfeltevétele, hogy legyen a vezetéknek önindukciója. Tudjuk, hogy a közönséges megszakítóknál a vezeték időconstansa határozza meg a megszakítások számát s szabja meg azoknak a határát, melyen túl nem mehetünk s a mi rendesen másodpercenként 100-nál több nem lehet ; míg itt a WEHNELT-féle megszakítónál ugyanazon vezetékben 2—3000, esetleg több teljesen kifogástalan megszakítást állithatunk elő másodpercenként.

Ez a tény annyival érdekesebb, mert e tekintetben ez a megszakító hasonló tulajdonságokat mutat, mint egy kondenzátor, mely periodikusan változó villamindító erő önindukciós áramkörébe van csatolva.

Ismeretes, hogy ha egy  $E=E_0 \cos pt$  villamindító erejű áramkörbe  $R$  ellenállású és  $L$  önindukciójú vezetékhez egysorba  $C$  kapacitású kondenzátor van kapcsolva, akkor az áram erőssége olyan lesz, mintha a vezetés önindukciója nem  $L$ , de  $\left(L - \frac{1}{Cp^2}\right)$  lenne, mert az áramerősség képlete :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{E_0 \cos (pt - \alpha)}{\sqrt{\left(L - \frac{1}{Cp^2}\right)p^2 + R^2}}$$

hol a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\left(L - \frac{1}{Cp^2}\right)p}{R}$$



Ha tehát  $L = \frac{1}{Cp^2}$ , akkor a kondenzátor teljesen ellensúlyozza a vezetés önindukciójának a hatását s az áram erőssége a vezetés galván ellenállása által lesz meghatározva, tehát

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{E_0 \cos pt}{R}.$$

A kondenzátor bekapcsolása tehát növeli az áram erősségét s ez maximumát akkor éri el, ha

$$L = \frac{1}{Cp^2},$$

vagyis

$$p = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

miből a periodus

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{LC}$$

Ez azt jelenti, hogy a vezeték oscillatio periodusa ebben az esetben egyenlő a villamindító erő periodusával, tehát a vezetés és a villamindító erő *rezonálnak*.

Az elektrolytikus megszakítónál szintén hasonló jelenségeket tapasztalunk; annak a bekapcsolása a vezeték önindukcióját lerontja, az áram erőssége növekszik és a maximális értéket a megszakítás kellő dimenzionálása esetében bizonyos meghatározott maximális frequentia mellett érzük el; úgy, hogy az elektrolytikus megszakító és a kondenzátor a vezetékben hasonlóan viselkednek. Ez nem meglepő dolog, mert ismeretes már KOHLRAUSCH, WINKELMANN s többek vizsgálataiból, hogy polározott voltameterok változó áramkörben a kondenzátorokénak megfelelő fáziseltolódással bírnak s ez is egyik támasza a galván polározás *töltési elméletének*, mely a polározott elektródokat oly kondenzátoroknak tekintti, melyeknek fegyverzetei az elektródok és elektrolyt, szigetelője pedig az elektród felületén megsűrített gáz vagy más ionréteg. Ezzel szemben GIBBS és WARBURG a vezetési elmélet hívei, kik a polározást vagy legalább annak egy részét az elektrolyt



concentratio változásaiból magyarázzák, melyek az áramot vezető ionok kiválása folytán jönnek létre.

Ezeknek a megfontolása után érdekesnek találtam megvizsgálni, hogy a WEHNELT-féle megszakító, mint ilyen polározott vezető, működésében a kondenzátorával mindenben megegyező viselkedést tanúsít-e, oly kondenzátorával, melynek kapacitása minden négyszögmilliméterre KOHLRAUSCH és OBERBECK mérései szerint mintegy 0,05 mikrofarad lenne.

Azok a tények, a melyeket WEHNELT közöl s a melyeket magam is megerősítve láttam kísérleteimben, erre látszanak mutatni; t. i. az, hogy a frequentia csökken az anódul szolgáló platinadrót felületének vagyis a kapacitásnak és a vezeték önindukciójának növekedésével.

Én úgy próbáltam e kérdésre felelni, hogy megvizsgáltam, minő befolyása van egy kondenzátor mellé kapcsolásának a megszakítóra s hogy befolyásolják a különböző megszakítók egymás működését, ha azokat egy sorba vagy párhuzamosan kapcsoljuk a vezetékbe. Erre a célra szolgálnak a következő kísérletek.

I. Körülbelül 1 mikrofarad kapacitású kondenzátor becsatolása a megszakítóval párhuzamosan csökkenti az áram erősségét, a szikrahosszat, de növeli a frequentiát (körülbelül egy quarttal) és a szikra erősségét, mint azt a szikra hangjából is, de KÖNIG-féle lánggal is ki lehet venni. Az áramerősség csökkenése ugyanazon megszakítónál függ a frequentiától, még pedig azzal fordítva arányos. Többnyire 2—4  $A$  között van. Két különböző megszakító közül a kisebbnél több az áramcsökkenés ugyanazon kondenzátor bekapcsolásánál. Így egy kis megszakítót (5—6 mm<sup>2</sup>) a kondenzátor egészen kiolt, *ugy hogy a vezetés megszakad.*

Gyakran megtörtént, hogy az így kioltott megszakító a kondenzátor kikapcsolásánál sem kezdett újra működni s csak a vezetés megszakítása s újból zárása hozta ismét működésbe.

A secundär szikra hossza csökken a kondenzátor alkalmazásánál, a primär szikra, vagyis a megszakító működése azonban egyenletesebb lesz általa. Egy a kondenzátorhoz csatolt 56 V. 16



gyertyás izzólámpa a bekapcsolásnál szépen világít, de galvanometer alig mutat kiütést.

- A kondenzátor ugyanilyen hatással van, ha azt nem a megszakítóval, de a RHUMKORFF primär tekercsével párhuzamosan alkalmazzuk.

II. Két egészen egyenlő megszakítót párhuzamosan kapcsoltam ugyanazon vezetékben, mint a melyben előbb csak az egyik volt; ezáltal az áramerősség kétszeresére növekedett, 15  $A$ -ról 30  $A$ -ra, a megszakítások száma azonban a felére szállt le, úgy hogy a kisütés hangja az alsó octávája lett az előbbinek. A kondenzátor most megint növelte a frequentiát és csökkentette az áramerősséget.

III. A két egyenlő megszakító egy sorba kapcsolásánál az áramerősség és a frequentia is csökkent, de ha kevés ellenállás ki kapcsolásával az áramerősséget az egy megszakítónál észlelt értékre emelem, úgy ugyanazon megszakításokat értem el, mintha csak egy megszakító volt bekapcsolva. A secundär szikra erőssége és feszültsége is változatlan.

IV. Két igen különböző megszakító egysorba és párhuzamos kapcsolásánál lényegében ugyanaz jó létre, mint az előző esetekben. Egy sorban kapcsolásnál a nagyobb megszakító csak mint egyszerű vezető szerepel, az áram erőssége ugyanaz, mintha csak a kisebb van bekapcsolva s a szikrajelenség is ugyanaz. A kondenzátor megint kioltja a szikrát s az csak a vezeték megszakítása és újból zárása után indul meg rajta. Ez a jelenség azt mutatja, hogy a megszakítón kivált gázokat a kondenzátor ott fogja s ezáltal az áram megszakad s csak ha a vezeték megszakítása által az elektródok töltésüket elvesztik, akkor indul meg újra az.

A párhuzamos kapcsolásnál az áramerősségek összeadódnak, úgy hogy ha előbb a kis megszakító dolgozik 4 $A$  árammal, a másik hozzácsatolása 14 $A$  növeli az áramerősséget, (magában a nagyobb 10—11 $A$ ) mindakét megszakító működik és a szikra hangja a két megszakítónak megfelelő hangoknál mélyebb. Ez az eset érdekesebb, de nem vizsgálhattam tovább részletesen, mert régi akkumulátoraim jórészt felmondták a szolgálatot; ezért is közlöm



most e kísérletek első eredményeit. E kísérletekből tehát az látszik, hogy a míg egy kondenzátor parallel kapcsolása az áramerősséget csökkenti és a frekventiát növeli, addig egy második megszakító épen ellenkező hatást hoz létre az elektrolytikus megszakítónál s így ez arra enged következtetni, hogy a jelenségek csakugyan a vezetés jellegével bírnak.

Közel fekvő gondolat az ivfény intermittáló voltát hasonló kísérletekkel vizsgálni meg s a mennyiben azt igen magas frekventiájúnak kell feltételezni, a vezetékek önindukciójának és a kapcsolásnak megfelelő megválasztása által kellene azt leszállítani.

*Klupathy Jenő.*



## FÉM-REDUKÁLÁS ÉS IZZÍTÁS ALUMINIUMMAL.

(A Társulat VI. közgyűlésén tartott előadás.)

Az az eljárás, a melyet e soraimmal megismertetni szándékozom, lényegében véve nagyon egyszerű, s tényleg újnak sem mondható; de annál meglepőbb hatásúak az ily módon megejtethető kísérletek, s annál újabbak az általa elért eredmények. Nem egyéb az, mint a chemiai rokonságnak, ennek a hatalmas erőnek új alakban való megnyilatkozása, a melyet száz meg száz alkalommal föllelünk a természet kincses házában, és ugyanannyiszor, vagy talán még többször mesterségesen előidézzünk az életszükséglet sokoldalú követeléseinek kielégítésére.

Ismeretes, hogy a chemiai vegyületekben cserebomlás akkor jó létre, ha a molekulákat alkotó atomok szétválasztására oly erőt használunk fel, a mely legyőzi azok chemiai rokonságát. Ily ereje az aluminiumnak is van a fémoxidokkal szemben.

Hozzuk az aluminiumot a különböző fémoxidokkal benső érintkezésbe, úgy az a fémoxidból az oxigent nagy erővel magához ragadja és a fémet színállapotban kiválasztja. Ime az aluminium, mint kitűnő redukáló szer.

Már mintegy félszázaddal ezelőtt is tudták, hogy az aluminium által, sőt magnesium segítségével is sok fémoxid redukálható, és hogy ez alkalommal jelentékeny meleg szabadul fel.\* A számosak között első volt FRIEDR. WÖHLER (Göttinga), a ki 1845-ben tett ez irányban kísérleteket, CLAUDE VAUTIN (London) pedig a nehezen

---

\* E kísérletezések érdekes története megtalálható: Liebig's Annalen der Chemie. 1898. 301. kötet. 19. l.



olvadó fémeket ez úton már jelentékeny számban tudta előállítani. De dr. HANS GOLDSCHMIDT chemikus (Essen a. d. Ruhr) volt az, kinek az említett eljárást gyakorlatilag értékesíteni, ipari czélokra kihasználni, és az aluminium-fém segítségével fém-oxidokat nagy tömegben redukálni legelőször sikerült.\*

GOLDSCHMIDT elődei ez irányú kísérletezéseiknél mindannyian ugyanegy csapáson haladtak, a melyet éppen nem mondhatni szerencsésnek. Először is az aluminium és a fémoxidok keverékének kicsiny, néhány grammnyi tömegével dolgoztak, a minek oka igaz, részben az aluminiumnak igen magas ára volt. (WÖHLER idejében egy kilogramm tiszta aluminium-fém 500 frtba került.) Továbbá a fémek oxidjai mellett azok chloridjait, főleg fluoridjait keverték aluminiummal s e keveréket kis tégelyben kívülről akarták fölmelegíteni a meggyújtás hőmérsékletéig, minek folytán — kivált az oxidoknál — többé-kevésbbé heves reakció jött létre, míg a fémkiválás igen csekély mértékben történt. E kutatásokat valamennyien ömlesztő szerekkel eszközölték abban a hiszemben, hogy az itt képződő, igen nehezen olvadó agyagföldök összeolvasztása csak is ily módon lehetséges. Nem volt ismeretes előttük az a fontos körülmény, hogy az aluminiumnak oxiddá való elégésénél oly magas hőfok keletkezik, a mely mellett a képződő aluminiumoxid minden ömlesztő szer segítségével nélkül megolvad. GOLDSCHMIDT e magas meleg-kifejlődés okát az aluminiumnak az oxigénnel való hatalmas melegfejlesztő képességében találja.

Összehasonlítás szempontjából álljon itt néhány elem melegfejlesztő képessége, a hol a számok az illető elem egységnyi tömegére vonatkoznak:

---

\* «Über ein neues Verfahren zur Darstellung von Metallen» stb. Zeitschrift f. angewandte Chemie. 1898. 821. lap., és GOLDSCHMIDTnak Berlinben 1899. január 9-én tartott előadása. (Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes.)



Hydrogen	34,200	kaloria.
Szén	8,317	"
Aluminium	7,140	"
Magnesium	6,077	"
Calcium	3,284	"
Mangan ( $MnO_2$ -á)	2,209	"
Mangan ( $Mn_2O_3$ -á)	2,013	"
Vas ( $Fe_2O_3$ -á)	1,876	"
Vas ( $FeO$ -á)	1,332	"
Zincum	1,314	"
Réz	321	"
Ezüst	27	"

Ez adatok nagyrészt LANDOLT-BÖRNSTEIN kémiai táblázataiból valók. Az abban elő nem forduló aluminium melegfejlesztő képessége dr. STRAUSS-nak, az esseni Krupp-gyár physikusának adata.

Mihelyest az aluminium gyártását — a nyolczvanas évektől kezdve — elektromos úton eszközölték, s az aluminium ára jelentékenyen alábszállt: \* a kísérletezéseket is nagyobb tömegekkel lehetett megejteni. Most már GOLDSCHMIDT törekvése oda irányult, hogy a kémiai folyamatnál kifejlődő erőt szabályozható mederbe szorítsa és a cserebomlást a keverék belsejében hirtelen megindítsa. Igaz ugyan, hogy a különböző fémoxidok- és a por alakú aluminium-keverékénél az aluminium redukáló hatásának megindítására különböző hőfok szükséges a szerint, a mint az oxigénnek rokonsága kisebb vagy nagyobb a kiválasztandó fémmel; de mivel a reakció egyszerre és hevesen jelentkezik, elégséges a meggyújtást a keveréknek csak egy pontjában fogatosítani. Ha tehát ez megtörténik, és az aluminiumoxid képződése az edény belsejében megindul a nélkül, hogy a fölhevítést kívülről eszközölnők: úgy az elmélet szempontjából is arra lehet következtetnünk, hogy e hatásnak az edény belsejében — még a levegő teljes elzárása mellett is — folytatódnia kell, mivel a cserebomláshoz szükséges oxigént a fémoxidok megadják.

Az egész eljárás lényege tulajdonképen abban áll, hogy a redukálás megindítására szükséges hőmérséklet lehetőleg alacsony

\* Az aluminium kilogrammjának ára most 2 frton alul van.



fokú és kényelmesen előállítható legyen. E célra GOLDSCHMIDT először az elektromos áramot használta, a melylyel azonban nem jutott eredményhez. Majd még néhány sikertelen kísérletet tett és csakhamar a nátriumsuperoxidban, főleg pedig a báriumsuperoxidban találta meg azt az alkalmas szert, a melynek segítségével a cserebomlás könnyen megindítható és szép fénytűnemény kíséretében folyik le. Így készült a Goldschmidt-féle «gyújtó», a mely báriumsuperoxidból, aluminiumporból és kevés sellakból álló keverék cseresznye-szem nagyságban, a meggyújtáshoz szükséges magnesiúmszalaggal ellátva.

GOLDSCHMIDT első kísérleteit a chrómoxid és aluminium keverék nagyobb tömegével végezte, a melyet magnesiával kibélelt agyaghengerbe tett. Mihelyest a reá helyezett «gyújtót» meggyújtotta, a cserebomlás azonnal megindult s az aluminium a fémoxid rovására égett el. A folyamat mindaddig tart, a míg a nehezebb fajsúlyú színfém a tégely alján össze nem gyűlik; e fölött úszik salak gyanánt az aluminium-oxid, azaz a korund. Így kapott 3—4 percz alatt 2—3 kg.-nyi szénmentes chróm-fémet.

De szakadatlanra is tehetjük e chemiai folyamatot, ha a tégelyt két nyílással látjuk el (egyik a salak, másik a fém számára való), és ha az átalakuló termékhez időnként több-kevesebb keveréket töltünk. Ily módon most már alkalmas kemenczében 100 kg. tiszta chrómot is gyártanak, a mire alig szükséges 25 percznél több idő. A tégely belsejében tényleg igen magas hőfoknak kell lenni, mert a chróm a legnehezebben olvasható fémek közé tartozik (olvadás pontja  $2000^{\circ}\text{C.}$ ) s eddig csak is az elektromos ivfényben olvadt meg.

Előállítható ez új eljárással szénmentes mangan, kovácsolható vas, 25 százalékos ferrotitan, ferrobor. Kiválasztható calcium; a gipsz (calciumsulfat) és aluminium keverék elégeése nagyon hevesen és erős fény kíséretében történik. Általában az aluminium hatása a sulfátokra nagyobb, mint a nitrátokra. Eddigelé a vanadium az, és GOLDSCHMIDT szerint a tantal is, a melyek az aluminium nagy redukáló hatásának ellenállnak. Redukáló szer gya-



nánt magnesium vagy calciumcarbide is használható, de ez utóbbi esetben természetesen carbidetartalmú fémeket kapunk.

A GOLDSCHMIDT-féle eljárásnak gyakorlati hasznát főleg három szempontból lehet kiemelnünk: a fémek kiválasztása, a mesterséges korund készítése és a magas hőfok segítségével létesíthető forrasztás szempontjából.

Fémeket ez úton tisztán és nagy tömegekben választhatunk ki, még pedig olyanokat is, a melyeket eddig olvasztott tömeg alakjában széntől mentesen előállítani nem sikerült. Az esseni vállalat már nagy mennyiségben gyárt chrómfémet, mangant, titánvasat stb.

A fémek kiválasztásával egy időben mesterséges korund is keletkezik, a melyet már «corubin» név alatt bocsátanak kereskedésbe és mint kitűnő köszörülő szert nagyban használnak. A corubinnak főelőnye: nagy keménysége, víz- és vasmentessége; e tekintetben jobb, mint a természetes smirgel, a melyet különben is megkarczol. A corubint a csiszolásra használt gyémánt sem karczolja meg. A chróm előállításánál keletkező korund lyukacsos tömeget képez, a melynek belsejében apró rubin kristályok vannak. E rubin kristályok a kathód sugarak hatása alatt vörös színben fénylenek, de kicsinységük miatt inkább tudományos, mint gyakorlati becsüek.

Ez eljárással könnyen, és aránylag kevés költséggel képesek vagyunk igen magas hőfokot előidézni, s ez által a forrasztást és hegesztést a legváltozatosabb alakban létesíteni. Ily magas hőfokot eddigelé csakis az elektromossággal lehetett előállítani. Az igen nehéz összeforrasztás, csöveknek, kisebb rudaknak nagy terjedelmű tárgyakhoz való forrasztása ez úton lehetségessé és olcsóbbá válik; épp így fémdaraboknak egy bizonyos helyen való fölmelegítése a nélkül, hogy a mellette levő részek áttüzesednének.

Nem lesz talán édektelen a vassinek ily módon való összeforrasztását megismertetni, a mi hosszú sineknek egy darabból való készítését lehetővé teszi. Ez pedig megbecsülhetetlen hasznosságú főleg az elektromos vasutaknál, a hol az áram vissza-



vezetésére a sineknek jó fém-érintkezése szükséges. Az eljárás a következő: a sinek két végét egymásra szorítják, az azokat körülvevő agyagburkolatba fémoxid-alumínium keveréket tesznek. A «gyújtó» meggyújtásával megkezdődik a kémiai folyamat, korund-hártya rakódik le, s alatta a vas fehér izzásig hevül, mire a két sín összeforrad. GOLDSCHMIDT 180 mm. magas sineket forrasztott ilyképpen össze; minden egyes forrasztás alig tartott negyed óráig, s a felhasznált alumínium nem volt több 4 kg.-nál.

Ha meggondoljuk, hogy ily forrasztás utólagos megmunkálást alig követel, hogy ugyanekkor színfémet és korundot is kapunk; természetes, hogy a költségek — a nyers termékek felhasználása mellett — jelentékeny mértékben alábbszállnak. Egyébként magára a forrasztásra és izzításra nem szükséges tiszta alumíniumfémet használni; a kellő szolgálatot a nyers alumínium is, — a mely több százalék vasat és silíciumot tartalmaz, — éppen oly jól megteszi. Ennek ára jelentékenyen kisebb. Továbbá a hőfokot is lehet szabályozni; mert pontosan tudjuk, hány kalória kell az összeforrasztáshoz s azt is, hány kalóriát fejleszt maga a folyamat: így a megfelelő keveréket előre kiszámíthatjuk s kellenél több anyagot nem szükséges felhasználni.

A cserebomlás gyors lefolyása ez új eljárásnak azt a nagy előnyt biztosítja, hogy korlátolt térben és igen rövid idő alatt, nagy felszerelés nélkül, a nehezen olvadó fémek jelentékeny tömegét vagyunk képesek előállítani.

Érdekessé teszi az egész eljárást az a körülmény is, hogy a kémiai folyamatot bárki a kísérleti asztalon minden nehézség nélkül bemutathatja.\*

Most felsorolom azokat a kísérleteket, a melyeket végeztem, megjegyezvén, hogy azok bármely középiskolai laboratóriumban megejthetők; az ezekkel járó költségek magasra nem rugnak és sok előkészületet nem igényelnek.

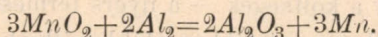
A keverék készítéséhez legalkalmasabb az úgynevezett alumi-

---

\* A kísérleteket czélszerűség szempontjából helyesebb a szellőző fülkében végezni.



nium-dara. Az agyagtégelyt magnesiával vagy homokkal béleljük ki. A «gyújtó» szalagjának meggyújtását gyufával vagy kényelmesebben Bunsen-lánggal eszközölhetjük. — A fémek kiválasztásánál nem kis jelentőségű a keverék mennyisége. Kis tömegekkel fémeket kiválasztani ez eljárás szerint csak tökéletlenül lehet, mert itt a lehülési viszonyok nagy szerepet játszanak. A chróm-fém redukálása csak akkor sikerül, ha a keverék legalább is 5 kg.-on felül van. Magát a keveréket általában véve az elméleti tömeg-viszonyoknak megfelelőleg kell készítnünk. Így pl. a mangan előállításánál a következő egyenlet az irányadó:



E szerint, ha egyszerűen a chemiai æquivalens számokat vesszük, 261 gr. mangandioxidból és 108 gr. aluminiumból kapunk 204 gr. aluminiumoxidot és 165 gr. manganfemet. A keletkező melegmennyiség nyilván az aluminiumnak és a mangannak a megfelelő oxigénnel való elégeése alkalmából kifejlődött melegmennyiség-különbségével egyenlő. Az aluminium melegfejlesztő képessége 7140 kaloria, ha tehát  $Al_2$  elég  $2Al_2O_3$ -dá, akkor  $4 \cdot 27 \cdot 7140 = 771120$  kaloria fejlődik. A mangan melegfejlesztő képessége 2209 kaloria, ha tehát  $Mn$  elég  $3MnO_2$ -dá, akkor  $3 \cdot 55 \cdot 2209 = 364485$  kaloria fejlődik. Így az aluminium-fémnek a mangandioxid közvetítésével való elégésénél  $771120 - 364485 = 406635$  gramm kaloria fejlődik.

Az itt keletkező hőmérséklet elméleti kiszámítására abból a megfontolásból indulhatunk ki, hogy a végső és a kezdeti hőmérsékletek különbsége azzal a viszonzszámmal egyenlő, a mely a cserebomlásnál kifejlődött melegmennyiség és átalakuló termékek molekula melegei között fennáll. Így

$$t_v - t_k = \frac{q}{m_1 c_1 + m_2 c_2},$$

hol  $q = 406635$  a kifejlődött melegmennyiség,  $m_1$  a mangannak molekula súlya, itt  $3 \cdot 55 = 165$ ,  $m_2 = 102$  a korund molekula súlya;  $c_1 = 0 \cdot 1217$  (rendes hőmérsékletnél) a mangannak,  $c_2 = 0 \cdot 25$  (közép-



értékben) a korundnak fajmelege. Tehát a reakció végén keletkező hőmérséklet elméleti értéke:

$$t_v = \frac{406635}{165.0 \cdot 1217 + 2.102.0 \cdot 25},$$

$$t_v = 5726^\circ \text{C.}$$

Mivel e kémiai folyamatnál gázalakú termékek nem keletkeznek, az égés belülről kifelé terjed s az egész mindössze is néhány percig tart: ez elméleti hőfoknak megközelítőleg létre kell jönnie. De ha meggondoljuk, hogy a fajmelegeket csak közönséges hőfokon ismerjük, pedig azoknak a keletkező hőmérsékletre kellene viszonyítva lenniök, a mely értékek bizonyára jóval magasabbak az itt használtaknál: természetes, hogy a tényleg előálló hőmérséklet kisebb lesz a kiszámítottnál.

Nem érdektelen a mangan többi oxidjának ez irányban tanúsított viselkedését szemügyre vennünk, a mikor is azt találjuk, hogy a különböző oxidoknál nagyon is különböző a kifejlődő melegmennyiség és a keletkező hőmérséklet. Az e számításokhoz szükséges adatok a következők: \* a melegfejlesztő képesség, ha 1 gramm *Mn* elég

<i>MnO</i> <sub>2</sub> -dát (mangandi- v. superoxidát).....	2209	grammkaloria.
<i>Mn</i> <sub>2</sub> <i>O</i> <sub>3</sub> -dát (manganoxidát).....	2013	«
<i>Mn</i> <sub>3</sub> <i>O</i> <sub>4</sub> -dát (manganoxiduloxidát).....	1947	«
<i>MnO</i> -lát (manganoxidullát).....	1817	«

Laboratoriumi bemutatásokra talán a mangan kiválasztása a legalkalmasabb, mert ennél a kiválás már néhány kilogramm keverék mellett megtörténik, s a tűnemény lefolyása meg lehetős nyugodt. A keveréket mangandioxidból (*3MnO*<sub>2</sub>) és alumíniumból (*2Al*<sub>2</sub>) megközelítőleg 261 : 108 arányban készítjük. Öntsünk ebből mintegy 30—50 gr.-ot a kibélelt agyagtégelybe, hintsük meg felületét báriumsuperoxidtal: mihelyest a «gyújtó» segítségével a reakciót megindítottuk, csakhamar jelentkezik a felületen a

\* Ez adatokat Wartha Vincze műegyetemi tanár úr volt szíves rendelkezésemre bocsátani.



megmerevedett, izzó korund salak. Ha erre a keverékből időközönként több-kevesebb mennyiséget vetünk, a korund réteg fölenged, s a reakció ismét és ismét megindul. Ily módon a tégelyt színültig megtölthetjük. A tégely belsejében levő hatalmas melegről fogalmunk lehet, ha az izzó keverékbe majdnem centimeter vastagságú vasrudacskát mártunk: az néhány pillanat alatt megolvad. S mégis az edény külső fala csak lassankint melegszik át, úgy hogy a folyamat kezdetén a tégelyt bátran kezünkben tarthatjuk. E körülmény magyarázata: az égés belülről indult meg és rövid ideig, 3–4 perczig tart. Kellő kihülés után a tégely tartalmát kiürítjük, s a szinfémet a salaktól néhány kalapácsütéssel elválasztjuk.

Ugyanily módon kapunk kovácsolható vasat a vasoxid ( $Fe_2O_3$ ) és az aluminium-dara ( $Al_2$ ) keverékéből, a melyet 160:54 arányban készítünk. A keverék meggyúlása magától, kevés nedvesség hozzájárulásával következőleg történik: Öntsünk a keverékre néhány gramm calciumcarbidot, azután kevés natriumsuperoxidot; ha most benedvesített papírszalaggal — a melyet óvatságból hosszú rúdra ragasztunk — a reagáló anyagokat összekeverjük, a reakció hatalmas láng kíséretében megindul, s a megolvadt korund alatt kiválik a vasfém.

E folyamatoknál előálló hőmérsékletet a WIBORGH-féle thermophonnal megmérhetjük, de természetesen csak megközelítő értéket kapunk. Ezzel azt találtam, hogy a hőmérséklet  $2500^{\circ}C$ -nél jóval magasabb.

Míg a natriumsuperoxid meggyúlása alacsony hőfok — mintegy  $200^{\circ}C$ . — mellett történik, ehhez képest annál magasabb hőfok kell a sulfátok égési folyamatának megindítására; de ha az már megindult, az elégs sokkal hevesebben történik, mint a nitrátoknál. Ezt következőleg mutathatjuk be: Megfelelő gipsz és aluminiumkeverékkel megtöltünk egy papiros csövet s azt homokba állítjuk. Gyújtsuk meg a papirost, s noha az égő papír hőmérséklete körülbelől  $700$ – $800^{\circ}C$ , maga a keverék nem gyúl meg. De ha most bariumsuperoxidot és aluminiumot („gyújtót”) helyezek reá s azt a magnesiumszalaggal meggyújtjuk: a keverék



vakító lánggal ég, s mint valami rakéta, oly hatalmasan sziporkázik.

A fémeknek csupán egy helyen vagy egész tömegükben való hevítésére az úgynevezett hevítő keveréket készítjük, a mely 15—20% aluminiumból, továbbá vasoxid és barnakőből áll. Az első esetben az illető helyet rossz vezetővel, pl. téglával is, körülveszszük, s azt az említett keverékkel erősen meghintjük; a második esetben a fémtömeget a keverékbe jóformán beágyazzuk. A meggyújtás a «gyújtóval» történik.

A fémek izzítását következő egyszerű kísérlettel mutathatjuk be. Közönséges fadobozt kibélelünk száraz homokkal, ebbe töltjük a hevítőkeveréket, úgy hogy az izzítandó testet (nálam 250 gr. súlyú vastag fejes szeget) mintegy 2 cm. vastagságban körülvegye. Hintsük meg tetejét báriumsuperoxiddal s indítsuk meg a reakciót, úgy az néhány perc alatt lefolyik. Ha most 3—4 perc múlva a fadobozt kiürítjük és a salakot néhány kalapácsütéssel leverjük: előttünk van a fehér izzásig hevített test. — Úgy is berendezhetjük a kísérletet, hogy az egész folyamat szemünk láttára történjék. E célból a hevítőkeveréket cementezzük, abból csonka kúp alakú tömeget képezünk, a melybe az illető testet (nálam ugyancsak 250 gr. súlyú szeget) jól beágyazzuk; ha most az így elkészített keveréket a «gyújtóval» meggyújtjuk, az égés egész szabadon, szép fénytünemény kíséretében folyik le. A salak eltávolítása után vakítóan világít elénk a fehér izzásig hevített test.

*Szekeres Kálmán.*



## A HOLD HEGYEINEK KISÉRLETI UTÁNZÁSA.

(Második és befejező közlemény).

VIII. Különös fontossággal bír a gyűrűhegyek tömegeloszlásának megbecslése  $K$  és  $\varepsilon = 1 - K$  által.  $K$  minden pozitív szám lehet 0 és  $\infty$  között, sőt negatív értékeket is vehet fel. Oroplastikai jelentősége a következő:

$K = \infty$ , egyszerű bástyanélküli mélyedés, mint több MARE az Eiffelben.

$K > 1$ , a süllyedés felülmúlja a közép szint fölé emelt tömeg térfogatát.

$K = 1$ , normális gyűrűhegység.

$0 < K < 1$ , a gyűrű térfogata a túlnyomó.

$K = 0$ , hegykoszorú, mélyedés nincs.

$K < 0$ , a belső fenék a környezet szintje felett fekszik, kitöltött gyűrű, mint a földön a legtúlnyomóbban a vulkánok; a Holdon a Wargentín.

A normális gyűrű számára  $K = 1$  és  $\varepsilon = 0$ , azaz a közepes szint fölé emelt tömeg térfogata ugyanaz, mint azon mélyedése, mely a szint alatt a belsőben szabadon maradt. Ebből kiindulva negatív  $\varepsilon$  mutatja, hányszor múlja felül a mélyedés a normális mélyedést a gyűrűtérfogat fölött, pozitív  $\varepsilon$  ellenben, hányszor foglaltatik a gyűrűtérfogata a mélyedésében. Mindkét esetben tehát  $\varepsilon$  abszolút értéke azt mutatja, mily messze esik a gyűrűshegység az ideális típustól. Az eredmények a következők:

a) Az  $\varepsilon = 0$  ideális eset a Holdon nem az általánosan uralkodó, úgy pozitív, mint negatív  $\varepsilon$ -ok is fordulnak elő.

b) A bemélyedés a túlnyomó: 92 esetben van 28 pozitív és 64 negatív  $\varepsilon$ .



c) Positiv  $\varepsilon$ -nal bíró gyűrűshegységek túlnyomóan csak a kis gyűrűknél találhatók. Ezeknél 13 esetben  $\varepsilon$  pozitív, 10-nél negatív; a közepes alakoknál van 34 pozitív és csak 19 negatív  $\varepsilon$ ; a nagy gyűrűs hegységeknél és sikoknál van 15 pozitív és csak 1 negatív  $\varepsilon$ . Minél nagyobb tehát az alak átmérője, annál inkább felülmúlja a belső mélyedés a gyűrű térfogatát.

A kis gyűrűknél feltűnő a gyűrűtömeg túlsúlya, de ugyanezen tény valósága mellett bizonyítanak azon vonatkozások is, melyek  $K$  és  $I$ ,  $K$  és  $A$ ,  $K$  és  $I - A$  között fennállanak. Már az eddigiekből is könnyen magyarázható:  $A$  és  $I$  ugyanis növekedő  $D$  mellett állandó középérték felé törekszik; a gyűrűtömeg tehát közel úgy nő, mint  $D$  maga, a bemélyedés térfogata, mint  $D^2$ , miáltal a súlyedésnek nagyobbodó  $D$  mellett észlelhető túlsúlya magyarázható. Ezen körülmény is arra vall, hogy legalább a nagyobb gyűrűshegyek képződési folyamatánál azon ok, mely a gyűrűt bizonyos magasságra emelte, elkülönítendő attól, mely az átmérő nagyságát szabta meg.

Az  $\varepsilon$  jellemző adattal valamely gyűrűhegység oroplastikai jelleme annyira adott, hogy képződésének minőségéről bizonyos ítéletet alkothatunk. Így pl. már negatív  $\varepsilon$ -ok fellépte magában is súlyos ellenvetés ama hypothezis ellen, hogy a gyűrűshegységek kosmikus por lehullásának eredményei. Ezen por a szintén porhanyos felületre esett ezen hypothezis szerint, s kiszorította az esés helye körül. Ha még azt is feltennők, hogy az ütközés annyira heves volt, hogy a Hold anyaga annyira összenyomódott volna, hogy eredő térfogata a hozzájáruló poranyag térfogatával együtt csak éppen akkora, mint a Hold anyagáé volt az ütközés előtt, vagy feltennők, hogy a leesett anyag maga egészen nulltérfogatig tömörült volna, megérthetnők ugyan, hogy  $\varepsilon = 0$ , de sohasem, hogy negatív. Már pedig SCHEINER esetében  $\varepsilon = -27$ . Hová lettek ezen esetben a lezuhant portömegek!

Látható tehát, hogy a Hold gyűrűs hegységeit jellemző adatok között bizonyos vonatkozások állanak fenn, melyek alkalmasak lehetnek, hogy ezen alakok keletkezésének módját magyarázzák. Persze e mellett mindenütt állanak fenn individuális különbözőségeik.



gek is, úgy hogy az általános folyamatokat adott esetben sok más mellékkörülmény kísérhette. A bemutatott úton mindenesetre eljutni valamelyes positiv eredményhez, melyet EBERT kísérlet alakjában állított elő. (Ein Vorlesungsversuch aus dem Gebiete der physikalischen Geographie.) (Bildung der Schlammvulkane und der Mondringgebirge, Ann. d. Phys. u. Chem. XLI. 1890. p. 351).

EBERT tanulmányozta áradási jelenségeit megmerevedő, megolvadt anyagnak, vagy szilárd suspendált részecskékkel megtöltött folyadéknak, ha szilárd, lapos parti falhoz ütközik. Ha a folyadék környezete fölé emelkedik, akkor nem túlságosan gyors visszahúzó-dás alkalmával az inundáció felületen szilárd részeket hagy hátra, vagy ha olvadt anyag húzódik vissza, visszamarad az anyag némi része merev állapotban. Ha a folyadék szintjét ismét emeljük, az által, hogy egy pontra újabb folyadékot engedünk ömleni, a periferia felé tóduló hullám kelletkezik. Ez hozzáütközik a visszamaradt szilárd részecskékhez vagy a megszilárdult anyaghoz, kellő mennyisége mellett átlépi a zárókört és újabb anyagot rak le. Így keletkezik lassan a hullámtörés vonala mentén fal, melynek lejtése belül, hol a folyadék ütközik és erosiót gyakorol tetemes, míg a külső oldalon, a folyadék kohæsioja és szívóssága mértékében lankás. Ha a bezáró part anyaga a folyadékban oldható, vagy ha kiömlő magma vagy láva esetében ennek melege elegendő, hogy a falnak bizonyos részét leolvassza, akkor a határvonal lassan tova-terjed és minden a folyadékba convexen benyúló rész csakhamar lekopik, úgy hogy a határpart mindinkább a körhez hasonlít, melynek középpontja azon hely, hol a folyadék beömlik, ha minden irányban ugyanazon szilárdsági viszonyok uralkodnak. Ilyen alakokkal találkozunk a Földön az iszapvulkánokban, de legelterjedtebben a Holdon.

Az iszapvulkánok területeiben határozott kúpok mellett, melyek csúcsán csak alárendelt fontosságú vízmedence van, nagyobb, lapos és vízzel telt medenczék is találni, melyek köralakúak és melyeket alacsony iszapfal zár be. A Gürgenti melletti Maccalubák között vannak 2—3 m. átmérőjű ilyen medenczék kevés dm.-nyi falmagassággal. Itt szénhydrogenek nagyobb számú buborékai, melyek



a medenczének hihetőleg szűk csövéen felemelkednek, emelik a vizet a medence széleihez, míg ismét vissza nem süllyed.

A kísérlet anyaga Wood-féle ötvény, melyet szivattyú segítségével átfúrt vízszintes tányérra hajtunk, majd ismét visszaszívunk. Gondoskodni kell természetesen arról, hogy a fém a szivattyúban folyós maradjon, és csak a tányéron dermedjen meg. A kiömlött fém különben a szélein és különösen ott, hol kiugró szögleteket képez, tüstént megfagy, és csupán a nyílás körül marad kis tócsa. A dugattyú betolásakor a folyadék kilép, emeli a tócsa felszínét és előnti a már megdermedt részeket. A dugattyú visszahúzásánál a szint süllyed és nem nehéz az apálynak megfelelő szintet a fémnek felszívása által annyira süllyeszteni a közép niveau alá, mint a mennyire a dagály alkalmával felette állt. Légbuborékok felhalálását természetesen akadályozni kell, valamint a dugattyú ütközéseit is lehetőleg kell gyengítenünk. A folyadék periodikus odaömlése és visszavonulása közben a fém hőmérséklete kisebbitethető, a fém mindig szivósabb lesz, mindinkább megdermed és hátramaradt a holdbeli hegység hű mása.

A külső határ minden esetben köralakú, még ha a tócsa, vagy a tányér nyílása nem is az. A belső talp általában véve mélyebben fekszik, mint a külső szint, a mi éppen a holdhegységeket jellemzi. Csak ama ritka esetben, midőn a közlekedés abban a pillanatban záratik el, melyben a magma felnyomatik, megtelik a medence, esetleg szélíg, s telt is marad. Ez azonban igen ritkán történik, mert hiszen az új fém mindig új hőt is hoz magával a mélységből, úgy hogy az eset tényleg csak akkor lép be, ha minden fém éppen dermedő félben van. A Holdon pl. a Wargentín ad erre példát. A gyűrűnek átlag mindenütt ugyanazon magassága van, de kisebb kúpokkal és csorbákkal egész hosszában meg van rakva. Az utóbbiak megfelelnek ama helyeknek, melyeken a magma utoljára folyt ki. A külső lejtőn lefolyó keskeny magmapatakok sugármenti kis emelkedéseket hoznak létre, melyek a Holdon szintén láthatók (ARISTARCHOS, EUDOXUS, ARISTOTELES). A külső lejtő mindig nagyon lankás, a belső meredekebb. A kísérlet mindig átlag  $5^\circ$  külső,  $34^\circ$  belső lejtést ad. A közepes niveau alatt fekvő mélyedés térfogatá-



nak viszonya a gyűrűhöz 2·5, úgy hogy a gyűrű térfogata általában véve kisebb, mint a mélyedése, mely hátra marad; ha minden megdermedt. Hasonló viszony áll fenn a Hold legtöbb gyűrűjére is. És egyébiránt is igen sok analógiát találni: ha pl. a magma emelésében és lesüllyedésében tetemes időköz áll be, akkor kettős gyűrű keletkezik. Máskor meg a 2-ik, 3-ik stb. gyűrű csak tökéletlenül képződik és pereméjének némely pontjában teljesen szaggatott. Ezek a sokszor megfigyelt nagy átjárók a gyűrűk falaiban.

Ha a képződési folyamatban szabálytalanságok állanak be, akkor nem képződik egyszerűen sima belső lejtő, hanem lépcsős terraszc. Alig van a Holdon gyűrűshegység, melyen ily terraszc legalább jelezve nem volna.

A gyűrű belsejének domborzata különböző azon fázis szerint, melyben az emelésnél vagy visszaömlésnél a megszilárdulás bekövetkezik. Ha még elég sok folyós magma van, akkor lapos, concav medencze jön létre, vagy az emelés alatt konvex. Ha a belső talp teljesen dermedt, és csak középütt szabad még egy csatorna, akkor kis centrális kúp keletkezik, mely majd meredekebb, majd lankásabb, de soha sem éri el a gyűrű magasságát. Némelykor a belső hegységnek egész csoportja keletkezik. Ha még elegendő folyós anyag van, akkor a dermedés produktumai félretolatlak, ezek között a magma fel s alá inog, belső kis kráter keletkezik. A Holdon mindezen alakok számára találunk példát, az iszapvulkánok számára ellenben csak ritkán, mert ezek belseje vízzel van megtöltve.

Ezek után joggal kérdezhetjük: Van-e a Holdon még valamilyes jel, mely arra vall, hogy ezelőtt megolvadt tömegek, pl. magma folyt? Ily tények nagyon támogatnák a leírt tünemény genetikus értékét.

A nagy sötét marék közül van sok, melyeknek szélein özőnlések tiszta nyomai látszanak. Ily áradások alkalmával a már megvolt képződmények részleges olvasztása állt be, mert azon gyűrűknek, melyek a mare szélein fekszenek, hiányzanak a mare felé fordított falából részek, belsejük ugyanazon nibeuban fekszik, mint a külső mare, és ugyanazon sötét színezetet mutatja, tehát a sötét mare anyagával van kitöltve. Különösen szépen látni ezt a mare Sereni-



tatis W-i részében, a hol a különben egészen normális Le Monnier gyűrűhegység ilyen rommá változott, vagy a mare Nectarisnál fekvő Fracastoron.

Minden selenographus ugyanígy magyarázza ezen jelenségeket, de ezért még mitsem tudunk az anyag minőségére vonatkozólag, melynek invaziójáról szoltunk. Gyakran a nagy marék jégtakarójára gondoltak, ZÖLLNER kimutatta, hogy a víz még az észrevehetetlen légkör által sem befolyásolt insolatio folytán állandóan jég marad, és ugyanarra utal LANGLEY is, ki a Hold hőmérsékletét  $0^{\circ}$  körülnek találja. SCHMICK különböző librációs fázisokban felvett fotogrammok stereoskopikus képeiben e marék fenekére vélt láthatni, és azt hitte, hogy a gyűrűk domborzatából hiányzó részeket a marék mélységeiben fellelhetette.

FAYE 1881-ben ismét oly véleményt mondott, mely a Hold teljes eljegesedésén alapszik. Azon képződményeket beszéli meg, melyek keletkeznek ha víz ingó jégtakaró egy nyílásán lép ki. Csakhogy ezek bizony csak távoli hasonlatosságot mutatnak a Hold felszíni alakjaival. Ezen nagyon fontos kérdés eldöntésére (hogy t. i. mily anyagról van szó) felhasználhatók LANDERER megfigyelései a Hold polarisációs szögletére vonatkozólag.

Ez a sötét marék számára  $33^{\circ}17' \pm 7'$  a felülettől számítva. BREWSTER tétele szerint ez  $n = 1.5233$  törési mutatónak felel meg s ez elég pontosan az opalok és obsidiánok törési mutatója. Másrészt LANDERER eredménye teljesen kizárja a jégtakarót. Ez számára ugyanis  $n = 1.312$ , a polarisációs szög  $37^{\circ}18'$ , tehát sokkal nagyobb, mint a valószínű hiba engedi.

Így tehát meglehetősen határozottan oly anyagra vezetettünk (vitrophyr), mely nagyon rokon a mi lávánkkal is, s mely a Hold sötét részeinek albedóját is kellőképen magyarázza. Így a bemutatott kísérlet már sokkal értékesebbé válik.

Az eddigi magyarázatokban szerepelt keresett hypothesisek helyett a következő kettőt akarjuk bevezetni EBERTTEL:

1. A Hold valamikor izzón-folyós tömeg volt, mely a hideg világtérbe való sugárzás által lassan lehűlt és megdermedt, még pedig a sugárzásnak kitett felületen először.



2. A Hold mielőtt mostani mozgási állapotába ment át, oly periodust élt át, melyben tengely körüli önálló forgással bírt; erre következhetett oly periodus, melyben, mint ma még Merkúr, ingamozgást végezett. A holdmozgásnál a tengely közel merőlegesen állt a Hold és Föld súlypontjainak összekötő egyenesére.

Ezen két feltevés teljesen elegendő a holdhegyek képzésének magyarázatára. Ha izzón-folyós világtest minden oldalról kisugározhat, akkor felületén lassan-lassan kéregrögök keletkeznek, melyek a még folyós magmában MALLETT, NIES és WINKELMANN kísérletei szerint úsznak. A Holdnál ehhez járult a Föld vonzása, mely a folyós részekben magasra csapó árhullámot hozott létre. Ha a Hold ezalatt elfordult, akkor felületének minden részében a magma emelkedett és süllyedt; minden áradatnál emelkedett a rögök fölé, ezeket előntötte és apály alkalmával ismét visszahúzódott. E mellett a forró magma képes volt leolvasztani a környező rögök kiálló szögleit és éleit is biztosítani magának köralakú kifolyási nyílást. Tehát szakasztott ugyanazon körülmények, melyek a kísérletben meg voltak valósítva, és persze az eredmény is ugyanaz.

A magmának a felület különböző pontjaihoz való folyásánál a surlódás által, különösen a mélységben netán szűk csatornában sok eleven erő tűnt el, a Hold elvesztette lassanként önálló forgását és ezt teljesen keringése idejével tette egyenlővé.

Ezen magyarázat szerint a gyűrűknek hiányozniok kellene a pólusokon. Vajjon így van-e, nem dönthető el, mert nem ismerjük ezek helyzetét a mostani mozgási állapot belépte előtt. Lehetséges, sőt némely jel határozottan a mellett szól, hogy a Hold, elvesztvén szabad tengelyforgását, döntést szenvedett oly tengely körül, mely nem esik össze forgási tengelyével.

Igaz, hogy a magma kiömlésekor a viszonyok nem olyegysíttűek, mint a kísérletnél és bizonyos, hogy megdermedő világtest rögei az alak és nagyságbeli különbségeknek sokkal nagyobb játékteret engednek, mint a Wood-féle ötvény kis rögei. De ennek megfelelőleg az árterületek is nagyobbak a Holdnál és így képződhetett ott is könnyen a nagyobb mértéknek megfelelőleg közepes állapot.

Végezetül felmerül az a kérdés: miért nem találni hasonló ala-



kokat a Földön, mely szintén folytonos tengerjárásnak van alávetve? Tényleg egyetlen egy kialudt kraterképződmény van a Földön, mely némileg hasonlítható a Hold hegyeihez: Ceylon régi kráterje, mely 70 km. átmérővel bírván, a Föld legnagyobb kráterje. A Val del Bove külső körzete 5·5 km., a Cantal 10, az Oisan 20 km. Ezzel szemben a Clavius gyűrűjének átmérője 210 km.

A felelet előbbi kérdésünkre közel fekvő. Azért nem találjuk a Földön az analog formatiókat, mert seholsem hatolhatunk le az eredetileg megszilárdult kéregig. Ezt víz és levegő mindenütt denudálta és hatalmas sedimens-réteggel takarta. A Holdnál már kihülése és mozgásváltozása alkalmával súlypontja 59 km.-rel vándorolt a tőlünk elfordított oldal felé, oda vonva minden levegőt, vizet és csapadékot. A hozzánk fordított felén soha folyós elem nem volt érezhető hatásaiban és domborzatának minden részlettanulmánya azt mutatja, hogy a Hold a bolygók felületének primitív alakja, nem pedig, mint ezt annyiszor halljuk, a bolygók, kihalt jövő képe.

Így megmagyarázható a holdhegységek alakja csupán oly erők által, melyek jelenlétét más jelenségekből is jól ismerjük.

A dolog tárgyi érdekén kívül mindenestre érdekes volt bemutatni, mint gondolkodik egy physikus oly csillagászati tárgyról, mely távol esik különbeni kutatásának körén kívül.

*Kövesligethy Radó.*



## A Mathematikai és Physikai Társulat hatodik rendes közgyűlése.

Alapszabályaink 24. §-a a közgyűlés idejének megválasztásában bizonyos szabadságot enged, a melyet a választmány legezélszerűbben úgy vélt kihasználhatni, hogy a közgyűlést a múlt évben kreált nemzeti ünnepnapra tette s — a mennyire csak lehetséges — a jövőre is e napra teendi Remélhető ugyanis, hogy e napon üdvözölhetjük körünkben egyaránt, a kiket a húsvéti nagy hét alatt lelkipásztori teendőjük tartott vissza eddig, és a kiket a szünet nagyobb kirándulásra buzdított. A közgyűlésnek nagyobb élénkséget gondoltunk kölcsönözhetni amaz a Nmgú Vallás- és Közoktatásügyi miniszter úrhoz intézett sikeres folyamodvánnyal, hogy kegyes intézkedése folytán a vezetése alatt álló intézetek tanárai, a kik az ülésen részt venni kívánnak, a nemzeti ünnepet megelőző és követő napon szabadságot kaphassanak.

Az ily értelemben közzétett meghívónak meg is volt a maga hatása, mert a míg a múlt évben mintegy negyven társulati tag vett részt a közgyűlésen, a mostanít száznál több látogatta és ezeknek jó negyed része vidéki tagtárs volt. A mennyire a körözött aláírási ívből és emlékeztethől összeállítani lehetett, a közgyűlésen a következő tagtársak és vendégek vettek részt:

Anderkó Aurél, Arany Dániel, Balog Mór, Bartoniek Géza, Bauer Mihály, Benda Jenő, Berecz Antal, Bogyó Samú, Bozzay Zoltán, Breznyik János, Büchler Alajos, Cholnoky Jenő, Csemez József, Csillag Vilmos, Csopey László, Demetzky Mihály, ifj. Devecis del Vecchio Mihály, Dischka Győző, Dsida Ottó, br. Eötvös Loránd, Erdődy Imre, Farbaky István, Feichtinger Győző, Fekete Jenő, Fényes Dezső, Fenyvesi József, Fertig Vilmos, Fröhlich Izidor, Gidró Bonifác, Glücklich Vilma, Gruber Nándor, Hanauer Jenő, Hermann József, Horti Henrik, Hubatsek Alajos, Inczédy Dénes, Iszlai József, Juckel Gyula, Jurány Henrik, Kados Aladár, Kalecsinszky Sándor, Kármán Ferencz, Károly Irén, Kerekes Dezső, Klug Lipót, Klupathy Jenő, Kont Gyula, Kopp Lajos, Koschowitz Gyula, Kovács János, König Gyula, Kövesligethy Radó, Kürschák József, Lakits Ferencz,



Lengyel István, Mack Frigyes, Magyar László, Mátrai Rudolf, Medveczky Lajos, Mikola Sándor, Novotny Endre, Oberle Károly, Pallagi Gyula, Péch Aladár, Pekár Dezső, Petry Gyula, Pilez Ottó, Pintér Sándor, Rados Gusztáv, Rados Ignác, Rátz László, Reif Jakab, Rejtő Sándor, Róna Zsigmond, Rucsinszki Lajos, Schenek István, Schlatter Alfréd, Schmidt Ágoston, Serédi Marcell, Steiner Lajos, Süss Nándor, Szabó József (Vác), Szabó Péter, Székely László, Szekeres Kálmán, Szerényi Géza, ifj. Szily Kálmán, Szijártó Miklós, Szirtes Ignác, Tangl Károly, Than Károly, Thanhoffer Lajos, Tötössy Béla, Visnya Aladár, Vörös Czirill, Wagner Alajos, ifj. Widlacsek Antal, Winter József, Winter N., Wittmann Ferencz, Zemplén Győző.

A közgyűlés hivatalos része 1899 április 10-én este 6 órakor vette kezdetét és — mint előre látható volt, nagyon gyorsan és simán folyt le.

Napirendje :

1. Elnöki megnyitó.
2. Titkári jelentés.
3. Pénztárvizsgáló bizottság jelentése.
4. Költségelőirányzat 1899-re.
5. Választmányi tagok választása.
6. Indítványok

pontozatokból állott.

## A KÖZGYÜLÉS.

### 1. Elnöki megnyitó.

Dr. báró Eötvös Loránd elnök a közgyűlést a következő rövid szavakkal nyitja meg :

Tisztelt Mathematikai és Fizikai Társulat !

Hatodik rendes közgyűlésünket most hívtuk össze, hogy elvégezzük azon teendőket, melyeket a társulati rend érdekében alapszabályaink értelmében magunk elé tűztünk. A társulati administrationális ügyekkel az eddigi tapasztalatok szerint nem lesz hosszás dolgunk. Nem is lehet az másképp ilyen társulatban, a mely szerény háztartást visz, a melyet azonban törekszik rendben tartani. De mi nem akarunk megelégedni avval, hogy ez a közgyűlésünk egyéb ne legyen, mint a hivatalos ügyeknek szükség-szerű elintézése, mi inkább arra törekszünk, hogy itt is kifejezést nyerjen azon eszményi cél, melyet magunk elé tűztünk. Mi magyar physikusok és matematikusok azért egyesültünk, hogy egymást tudományos törekvéseinkben támogassuk, hogy folyóiratunkkal, előadások tartásával személyes, barátságos érintkezésben egymást buzdítsuk s egymásban a tudomány



szerefétét fentartsuk. Azért az a szándékunk, hogy a mikor társulati ügyeinkről lesz szó, a tudománynak is jusson tér. Választmányunk gondoskodott arról, hogy ezen közgyűlésünk alkalmából a hivatalos ügyek elintézése után alkalom nyíljon a tudományos kérdésekről is szólni. Ezen értelemben intézte felszólítását a Társulat tagjaihoz, és ezen felszólítás nem volt eredménytelen. A megjelent társulati tagok ezen szép száma erről tanusodik. Nekem kellemes kötelességem, hogy a Társulat nevében üdvözljem valamennyit, különösen a vidéki kartársakat. Ezzel megnyitom a Társulat hatodik közgyűlését s felkérem a titkár urat, hogy jelentését előterjeszsze.

Az élénk éljenzéssel fogadott megnyitó után következett a :

## 2. Titkári jelentés, Kövesligethy Radóttól.

Tisztelt közgyűlés!

Úgy vélem, hogy azok a virágok, a melyeket szaktársulat évi jelentésébe beleszó, a társulatnak egy-egy viruló ágába kerültek. Örömmel jelezhetek e téren is haladást: jelentésem a múlt évihez képest fölötte száraz és rövid lesz.

Társulatunk kései gyermeke, folyóiratunk VI. évfolyama, a mely négy matematikai és három physikai értekezést tartalmaz, 27 ív terjedelemben megjelent. Vele nemcsak tartozásunkat róttuk le, hanem egyszersmind kiegészítettük köteles terjedelmére a némileg csonkán maradt, csak 20 $\frac{1}{2}$  ívet tevő V. évfolyamot is. Különösen kiemelem e sorozatban Bolyai János «Appendixét» mint tisztán magyar munkát, a melyet a Magyar Tudományos Akadémia volt szíves lapunk számára átengedni. A mennyire én hallottam, mindenki helyeselte a pótlás választott módját és nem egy tagtársunk óhaja, hogy a klasszikus értekezések közlése állandósíttassék. Jelen helyzetünkben — sajnos — még nem találhattunk erre módot.

A VII. évfolyam 26 $\frac{1}{2}$  íven szintén megjelent. Változatos tartalma és a névsor terjedelme tagtársaink élénk munkakedvéről tanúskodik. Czikksorozatunkban több, gyors megjelenést igénylő önálló kísérleti dolgozatot is nyújthattunk.

Az V. matematikai tanulóversenyt 1898 október 29-én tartottuk meg, még pedig — miként a decemberi füzetben részletesen meg volt írva — ezúttal is biztató sikerrel. Az első br. Eötvös-díjat Kármán Tivadar, a másodikat Gróffits Gábor nyerte meg. Maguk a dolgozatok azt a határozatot érelték meg a választmányban, hogy ezentúl a versenyek lehetőleg korán — mihelyt a beírások megengedek — tartassanak meg.

Az év folyamán 9 rendes ülése volt a Társulatunknak, a melyen összesen 11 előadó 8 matematikai és 9 physikai tárgyat mutatott be. Kedvező jelenség, hogy egyik előadó messze vidékről rándult fel.



A választmányi ülések, melyeknek számát lehetőleg nem szaporítjuk, ez évben is kizárólag a Társulat belső ügyeivel foglalkoztak.

Társulatunk ez év elején 408 tagot számlált; ezek közül 5 hölgytag és 14 pártoló és örökítő tag szerepel. Az utolsó évek statistikája szerint e létszám lényeges emelkedése már nem várható és e szerint újabb segélyforrások teremtése csak más úton, előfizetések alapján remélhető. A választmány megtette e téren az első, hihetőleg sikerre vezető lépéseket.

Tagtársaink számának ez állandóságában megnyilatkozik a halál munkája is. Meg kell vigasztalódnunk, ha ki leröjja e tartozását, midőn emberi számítás szerint ideje letelt, de nem könnyű elfelejteni, a ki életének virágában hagyott el. Tán legjobban fájjaljuk az első matematikai tanulmányverseny fényes pályát ígérő nyertesének elhúnytát.

Bár törekvésünk, a magunk erejéből élni meg, ez eszményt még nem érhattük el. Különös köszönettel tartozunk tehát a Magyar Tudományos Akadémiának, a mely a múlt évben is kegyes volt Társulatunkat hathatósan támogatni, ismételtén 1000 forintot szavazván meg neki. És hálás köszönetet mondunk a Nagyméltóságú Vallás- és Közoktatásügyi Minister úrnak is, a ki az Elnökség kérésére intézkedni kegyeskedett, hogy a vezetése alatt álló intézetek tanárai közgyűlésünk idejére szabadságot kaphassanak. E kegyes intézkedés nem csupán Társulatunk közgyűlését élénkítette, hanem egyszersmind fejlesztő intézményül való elismerése, a melynek minden erőnkéből hiven akarunk megfelelni, nem csupán e közgyűlés alatt, hanem a jövőben is mindenha.

Végül fogadják hálás köszönetemet tisztelt munkatársaim, a kik egyaránt szívesen-készek lapunkat támogatni és üléseinket élénkíteni, tisztességemet könnyűvé és kellemessé tudták tenni. Jóindulatú támogatásukat a jövőben is kérve, kérem, méltóztassék e jelentésemet tudomásul venni.

★

A napirend 3. és 4. pontja a közgyűlés által kiküldött pénztárvizsgálók jelentése és az 1899-iki költségelőirányzat bemutatása.

### 3.—4. Pénztárnok jelentése.

Tisztelt Közgyűlés!

Van szerencsém a pénztárvizsgáló bizottság által átvizsgált és jóváhagyott zárszámadást tisztelettel előterjeszteni. E szerint a Társulat 1898. évi bevételei 6522.01 frtot, kiadásai pedig 5103.96 frtot tesznek ki. A maradvány 1418.05, melyhez még 1692 frtnyi tagdíj hátralék mint követelés járúl. Ezzel szemben összesen 2310.06 frtnyi tartozásunk van, t. i. 1870.06 nyomdai tartozás, 440 frt írói tiszt. díjak.



A zárszámadás számszerű tételi a következők: (L. a zárszámadást.)

Az előirányzattól jelentékenyebb eltérés van a f. é. tagdíjaknál, t. i. 502.46 frttal kevesebb, a hátralékoknál pedig 136.00 frttal több folyt be, mint a mennyi előirányoztatott, a tud. akadémia segélyénél 300 frttal több, mert a Bolyai fordítás költségeit az akadémia megtérítette; továbbá 102.91 frttal több folyt be az előfiz. díjakból. A kiadásoknál jelentékenyebb eltérés van a nyomdai költségeknél, t. i. 835 frttal kevesebbet fizettünk az előirányoztnál, továbbá az írói t. díjaknál 516.78 frttal, a kisebb nyomtatványoknál 132.17, mert ez a nyomdai költségekben benn van. Az expedíto 71.45 frttal került többbe, a vegyeskiadások címe alatt pedig 184.76 frt szerepel, mely összeg még korábbi évekről fönmaradt ügyviteli költségek kiegyenlítésére fordítatott.

Ezek után kérem a t. közgyűlést, kegyeskedjék részemre az 1898. évi számadásokat illetőleg a fölmentvényt megadni.

## BEVÉTEL

## 3. 1898. évi zárszámadás.

## KIADÁS

	Előirányzat		Eredmény			Előirányzat		Eredmény	
1897. évi zárszámadási maradvány	1432	86	1432	86	Nyomdai költségek	3384	43	2746	—
Örökítő tagdíjak	—	—	100	—	Írói tiszteletdíjak	2159	43	1642	75
Folyó évi tagdíjak	1307	—	804	54	Kisebbségi nyomtatványok	210	—	77	83
Hátralékos tagdíjak	2028	—	2164	09	Expediáció	134	—	205	45
M. Tud. Akadémia segélye	4000	—	1300	—	Irodai költségek	150	—	167	73
Hirdetési díjak	80	—	160	—	Középisk. math. tanulmányverseny költs.	82	—	79	44
Kamatok	329	—	301	54	Vegyes kiadások			184	76
Előfizetési díjak	140	—	242	91	Maradvány készpénzben			867	85
Vegyes bevételek	—	—	16	07	Takarékpénztári betétben			350	20
	6316	86	6322	01		6316	86	6322	01

## VAGYON

## Vagyon-mérleg.

## TEHER

Készpénz	532	86	867	85	Alaptőke	6110	—	6210	—
Takarékpénztári betét:					Nyomdai tartozások	2384	43	1870	06
Első hazai takarékp. .... 40029	1060	—	1060	—	Ki nem fizetett írói tiszteletdíjak	1079	43	440	—
" "									

A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtuk. Budapest, 1899. április 5.

A választmány megbízásából:

Kövesligethy Radó s. k.

A közgyűlés megbízásából:

Gruber Nándor s. k. Beke Manó s. k.

ügyv. titkár.

Bogyó Samu s. k. Balog Mór s. k.



[illegible]



### 5. Választmányi tagok választása.

Az alapszabályok 20. §-ának rendelkezése szerint a választmány egy harmada, a legrégebben választott négy tag lép ki. Ezek: Beke Manó, Gruber Nándor, Heller Ágost és Réthy Mór. A választmány ugyanőket ajánlja újból való megválasztásra és a Lakits Ferencz és Károly Irén tagtársakból állott szavazatszedő bizottság jelentése alapján a beadott 73 szavazat közül esett Beke Manóra 71; Gruber Nándorra 69; Heller Ágostra 67, és Réthy Móra 71 szavazat, a minek értelmében mindnégy újból választatott.

### 6. Indítványok.

Minthogy az alapszabályilag követelt időben indítvány nem adatott be, ezen 6. pont magától elesett, és miután Inczedy Dénes és Pallagi Gyula tagtárs urak a múlt évi közgyűlés jegyzőkönyvét hitelesítették, Elnök a gyűlés hivatalos részét berekeszti.

\*

Közgyűlés után Pekár Dezső bemutatta a Zeiss-féle új vetítő lámpát, átlátszatlan testek és különböző rendszerű színes fotografiák vetítését megfelelő magyarázatokkal. A valóban szép mutatványok és különösen a pompás Lumière-féle fényképek rendkívüli tetszéssel találkoztak. Nem kevésbbé tetszetek ama tájképfelvételek vetítése, melyeket báró Eötvös Loránd a dobsinai jégbarlangról, Visegrádról és a dolomitokról készített.

Előadás után kedélyes társasvacsora következett, melyen 49 tagtárs vett részt.

A közgyűlést követő nap délelőttje intézeti gyűjtemények megtekintésére volt fordítható, d. u. 4 órakor ismét előadások következtek. A választmány főtárgyakul a numerikus számolás eszközei (bevezető, Rados Gusztáv; numerikus táblázatok és számológépek, Gruber Nándor; számológécek, Kürschák József; integrál és gömbvonalzó, Tötössy Béla és planimeterek, Kövesligethy Radó); a négydimenziós szabályos testek projekciója a háromdimenziós térre (Csillag Vilmos); elektrolitikus áramszagató (Wittmann Ferencz) és magashőfokú kemence a kísérleti asztalon (Szekeres Kálmán) című előadásokat jelölte volt ki.

Az első előadás kissé hosszúra nyúlt, úgy hogy Wittmann és Szekeres fölötte érdekes mutatványos előadása — melyeket terjedelmesen ismerte-



tünk — csak Csillag és Kövesligethy tagtársak lemondása folytán volt megtartható.

Az előadások után Elnök különösen a résztvevő számos vidéki tagtársnak köszönetet mondva, és kifejezve reményét, hogy a most tapasztalt kedvező lefolyás alapján közgyűlésünk számára állandóan megtartható napot nyertünk, a hatodik rendes közgyűlést berekeszti.



## A MÁSODRENDŰ FELÜLETEK OSZTÁLYOZÁSA AZ $n$ -DIMENZIÓS TÉRBEN.

Mióta DESCARTES az algebrát a geometriára alkalmazta, gyakran általánosítottak oly tételeket, melyeket a geometriai szemlélet nyújtott. Hogy ez általánosításnál a geometriában keletkezett terminológiára támaszkodhassunk, felhasználjuk az  $n$ -dimenziós geometriát. A geometria emez ága, mely létezését főleg az általánosítás elvének, a modern geometriai kutatás egyik leghatalmasabb rugójának, köszöni, a térnek  $n$  dimenziót tulajdonít, a nélkül, hogy kutatná azt az inkább filozofiai, mint matematikai kérdést, vajjon ily tér létezik-e. A geometriai terminologia az algebrai tételek általánosításánál annyiban van segítségünkre, hogy maga is kijelöli a tétel általánosításának helyes irányát, és ezzel némi biztosítékot nyújt az iránt is, hogy nem triviális és meddő eredményekhez jutunk, sőt sokszor szemléletesleg egész evidens geometriai relációk algebrai általánosítása is figyelemre méltó módon gazdagította az algebrát. Ez a körülmény jogosít bennünket a matematikában az  $n$ -dimenziós tér használatára, de az is, hogy sokszor algebrai kutatások könnyen átvihetők az  $n$ -dimenziós térre és itt könnyen áttekinthető összefüggésben fejtenek meg bizonyos geometriai problémákat, melyek azután a közönséges térre, mint speciális esetre átvihetők. Így HENSEL-t egy a Crelle J. 113. kötetében megjelent értekezésében \* a másodrendű felületek osztályozása az  $n$ -változós nem homogén quadratikus alakok osztályszámának megállapítására vezette. A másod-

---

\* Ueber die Classification der nicht homogenen quadratischen Formen und der Oberflächen zweiter Ordnung.



rendű felületek projektív szempontból csak két csoportra oszlanak, úgy mint másodrendű felületek singularitással és a nélkül. Az alaki viszonyok pontosabb figyelembe vétele végett az alakzathoz a végtelenben fekvő síkot adjungáljuk, mely a transzformációnál változatlan maradjon, vagyis az affin rokonságokat vizsgáljuk és így a másodrendű felületek osztályozása az  $n$ -dimenziós térben az algebrának egy egészen elvont fejezetéhez, az  $n$ -változós nem homogén quadratikusan alakok osztályszámának a megállapításához vezet.

E megállapításnál ki fogjuk mutatni, hogy az  $n$ -változós quadratikusan alakok nem æquivalens osztályainak száma  $(n+1)(n+2)$ , æquivalensnek nevezvén két  $F$  és  $\bar{F}$  alakot, hogy ha található egy megfordítható lineár transzformáció

$$x_i = a_{i0} + \sum_k a_{ik} \bar{x}_k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

mely  $F$ -et átviszi  $\bar{F}$ -nek egy többszörösebe; nyilván ugyanakkor az inverz transzformáció által  $\bar{F}$  átmegy  $F$  egy többszörösebe. Ha két alak csak egy pozitív vagy negatív állandóban különbözik, identikusak.

E tétel levezetésére az alak helyett az együtthatóiból képezett rendszert fogjuk vizsgálni és szükségünk lesz a rangszám, és signatura fogalmára.

*Rangszám* alatt értjük az alak együtthatóiból képezett determináns ama legmagasabb fokú minorának foksámát, mely nem tűnik el.

Az *alak signaturája* alatt értjük FROBENIUS-sal a homogenné tett alakban előforduló pozitív és negatív quadratikusan tagok számának a különbségét.

Könnyen ki lehet már most mutatni, hogy az alkalmazott lineár transzformáció az alak rangszámát nem változtatja meg.

$$F \equiv a + b_{0k} x_k + \sum_{i,k} b_{ik} x_i x_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

quadratikusan alak helyett együtthatórendszerét fogjuk vizsgálni. Ez a következő



$$\begin{pmatrix} a & b_{01} & b_{02} & \dots & b_{0n} \\ b_{10} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ b_{20} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n0} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (b_{0k} = b_{k0}) \\ (c_{ik} = c_{ki}) \end{matrix}$$

és röviden jelölve

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Ez az együttható rendszer egy vele æquivalensbe megy át a következő három elemi és nyilván megfordítható transzformáció mindegyikénél

$$\begin{array}{ll} a) & x_i = \gamma \bar{x}_i \\ b) & x_i = \bar{x}_k \\ c) & x_i = \bar{x}_i + \bar{x}_k, \end{array}$$

a hol  $x_i$  és  $x_k$  két tetszőleges változó és a hol az összes többi  $x_k$  változó a megfelelő  $\bar{x}_k$ -val egyenlővé teendő.

Ha e mellett az együttható rendszerben előálló változásokat tekintetbe vesszük, a következő eredményt nyerjük:

Az  $\begin{pmatrix} a, b \\ b, c \end{pmatrix}$  rendszer æquivalensbe megy át, ha  $n$  utolsó sorának bármelyikét egy tetszőleges számmal szorozzuk, vagy ha az utolsó  $n$  sora közül kettőt felcserélünk egymással vagy ha bármely sor elemeihez az utolsó  $n$  sor valamelyikének többszörösét hozzáadjuk, de mindig a rendszer megfelelő oszlopát is egyenlően változtatjuk. Mindezek a változtatások az  $F$  alak valamelyik felhozott transzformációjának felelnek meg. Könnyen kimutathatjuk még, hogy az első sort és oszlopot is szorozhatjuk egy tetszőleges állandóval. Tekintsük ugyanis az  $F$ -fel æquivalens következő alakot

$$\gamma^2 F = a\gamma^2 + 2\Sigma b_{0k}\gamma^2 x_k + \Sigma\Sigma c_{ik}\gamma^2 x_i x_k$$

és tegyünk benne

$$x_i = \gamma \bar{x}_i$$

$$(i=1, \dots, n)$$

akkor

$$\bar{F} = a\gamma^2 + 2\Sigma b_{0k}\gamma^2 \bar{x} + \Sigma\Sigma c_{ik}\bar{x}_i \bar{x}_k,$$



melynek együttthatósrendszere

$$\begin{pmatrix} a\gamma^2 & b\gamma \\ b\gamma & c \end{pmatrix}$$

az eredetiből úgy származik, hogy az első sort és oszlopot  $\gamma$ -val szorozzuk. Lehet továbbá még az egész rendszert  $(-1)$ -gyel szorozni, mert ez által az  $F$  alak a vele æquivalens  $(-F)$  alakba megy át; összefoglalva ezeket az előbbiekkal, nyerjük a következő tételt:

Az  $\begin{pmatrix} a, b \\ b, c \end{pmatrix}$  rendszer æquivalensbe megy át, ha bármely sorát vagy oszlopát egy a zérustól különböző állandóval szorozzuk, vagy két sorát és oszlopát felcseréljük, vagy valamelyik sorának és megfelelő oszlopának többszörösét egy másik sorhoz és a megfelelő oszlophoz hozzáadjuk; de az első sort és oszlopot nem szabad egy későbbivel felcserélnünk vagy egy későbbihez hozzáadnunk. Végre lehet valamennyi elemnek előjelét egyszerre megváltoztatni.

A  $(c_{ik})$  szimmetrikus rendszerről FROBENIUS (Crelle 86) és KRONECKER (Crelle 107) kimutatta, hogy átalakítható diagonális rendszerré, melyben minden diagonális elem  $\pm 1$  vagy 0, a többi elem mind 0. Szimmetrikus sor- és oszlopfelcserélések által a  $+1$  elemeket a diagonális első, a  $(-1)$  elemeket a következő és a 0 elemeket az utolsó helyeire hozhatjuk. Legyen a  $(+1)$  elemek száma  $\rho$ , a  $(-1)$  elemeké  $\rho'$  és 0 elemeké  $n - \rho - \rho'$ , akkor a redukált  $c_{ik}$  rendszert könnyen érthető módon így jelölhetjük:

$$\begin{pmatrix} (+1)_\rho & 0 & 0 \\ 0 & (-1)_{\rho'} & 0 \\ 0 & 0 & (0)_{n-\rho-\rho'} \end{pmatrix}$$

Ugyanezeket a sorcseréket eszközölhetjük az egész  $\begin{pmatrix} a, b \\ b, c \end{pmatrix}$  rendszeren is, mert itt soha az első sort vagy oszlopot egy mássikkal nem kötjük össze. Ez által az egész rendszer átmegy a következőbe, melyben a  $b$  elemek megváltoztak:



$$\begin{pmatrix} a & b^{(1)} & b^{(2)} & b^{(3)} \\ b^{(1)} & (+1)_q & 0 & 0 \\ b^{(2)} & 0 & (-1)_{q'} & 0 \\ b^{(3)} & 0 & (0) & (0)_{n-q-q'} \end{pmatrix}$$

Ebben a rendszerben a  $b^{(1)}$  és  $b^{(2)}$  elemeket eltüntethetjük azáltal, hogy az illető egységhez tartozó sornak egy alkalmas többszörösét az első sorból levonjuk. Ez által nyerjük a következő æquivalens rendszert:

$$\begin{pmatrix} a' & 0 & 0 & b^{(3)} \\ 0 & (+1)_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)_{q'} & 0 \\ b^{(3)} & 0 & 0 & (0)_{n-q-q'} \end{pmatrix}$$

Ha a hátralevő  $n-\rho-\rho'$  számú  $b^{(3)}$  elem közül van olyan, mely  $\leq 0$ , ezt a  $b^{(3)}$  elemek közül az első helyre hozhatjuk és a hozzá tartozó sort és oszlopot  $b_1^{(3)}$ -gyel osztván,  $=1$ -gyel tehetjük. Ezek után a többi  $b^{(3)}$  elemeket, valamint az első helyen álló  $a$  elemet azáltal tüntethetjük el, hogy a  $b_1^{(3)}$ -hoz tartozó sor alkalmas többszöröseit minden következőből és az elsőből is levonjuk és épp úgy járunk el az oszlopokkal is. Az így előállott rendszerben

$$c_{11} = \dots = c_{qq} = +1, \quad c_{q+1, q+1} = \dots = c_{q'q'} = -1 \\ b_1^{(3)} = b_{q+q'+1, 0} = b_{0, q+q'+1} = 1$$

és minden egyéb elem  $=0$ . Az eredeti alak tehát ebben az esetben æquivalens a következő redukálttal:

$$(3) \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_q^2 - \xi_{q+1}^2 - \dots - \xi_{q+q'}^2 + 2\xi_{q+q'+1}.$$

Ha pedig a redukált rendszerben már minden  $b^{(3)}=0$ , akkor ha  $a \geq 0$ , az  $=\pm 1$ -gyé tehető, ha az első sor és oszlopot  $\sqrt{|a|}$ -val osztjuk. Ekkor a redukált alak a következő:

$$(3a) \quad \pm 1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_q^2 - \xi_{q+1}^2 - \dots - \xi_{q+q'}^2,$$

ha pedig  $a=0$ , akkor

$$(3b) \quad \xi_1^2 + \dots + \xi_q^2 - \xi_{q+1}^2 - \dots - \xi_{q+q'}^2.$$



A (3) és (3b) alakoknál esetleg  $-1$ -gyel való szorzással mindig  $\rho \geq \rho'$  tehető, (3a)-nál pedig ugyanez által mindig elérhetjük, hogy az állandó  $+1$  legyen, csakhogy akkor  $\rho \leq \rho'$ .

Ha összefoglaljuk az eddigieket, a következő eredményhez jutunk:

*Minden nem homogén quadratikus alak æquivalens a következő három alak egyikével:*

- I.  $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_q^2 - \xi_{q+1}^2 - \dots - \xi_{q+q'}^2$   
 $q+q' \leq n, q' \leq q$
- II.  $1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_q^2 - \xi_{q+1}^2 - \dots - \xi_{q+q'}^2$   
 $q+q' \leq n$
- III.  $\xi_1^2 + \xi_q^2 + \dots + \xi_q^2 - \xi_{q+1}^2 - \dots - \xi_{q+q'}^2 + 2\xi_{q+q'+1}$   
 $q+q' \leq n-1, q' \leq q$

Könnyű már most kimutatni, hogy az így talált három típus közül egyik sem æquivalens a másikkal. Az említett transzformációk t. i. sem az egész  $\begin{pmatrix} a, b \\ b, c \end{pmatrix}$  rendszernek, sem a  $(c_{ik})$  rendszernek rangját nem változtatják, utóbbiét azért nem, mert minden egyes transzformációnál e rendszer sorai és oszlopai mindig magukkal és soha az egész rendszer első sorával vagy oszlopával nem lépnek érintkezésbe. Jelöljük az  $\begin{pmatrix} a, b \\ b, c \end{pmatrix}$  rendszer rangját  $[a, b, c]$ -vel és a  $(c_{ik})$  rendszer rangját  $[c]$ -vel, akkor ezek a számok az  $f$  alak tetszőleges transzformációjánál invariánsok, tehát a következők is:

$$(4) \quad \begin{cases} J_0 = [a, b, c] - [c] \\ J_1 = [c] \end{cases}$$

Két redukált alak pedig csak akkor lehet æquivalens, ha  $J_0$  és  $J_1$  mindkettőre különböző. Már most

$$\begin{array}{lll} \text{I-nél} & J_1 = \rho + \rho', & [a, b, c] = \rho + \rho', \quad J_0 = 0, \\ \text{II-nél} & J_1 = \rho + \rho', & [a, b, c] = \rho + \rho' + 1, \quad J_0 = 1, \\ \text{III-nál} & J_1 = \rho + \rho', & [a, b, c] = \rho + \rho' + 2, \quad J_0 = 2. \end{array}$$



Tehát az I., II. és III. alakok egymás között nem æquivalensek és két egy ilyen osztályhoz tartozó alak is csak úgy lehet æquivalens, ha a pozitív és negatív négyzetek számának összege ugyanaz.

Ámde két ilyen alak is csak akkor lehet æquivalens, ha a  $\rho$  és  $\rho'$  számok külön-külön megegyezők, azaz, ha az alakok identikusak. Hogy ezt kimutassuk, megjegyezzük, hogy az itt alkalmazott koordinátatranszformációk mind csak a szimmetrikus  $\begin{pmatrix} a, b \\ b, c \end{pmatrix}$  rendszer szimmetrikus transzformációi, melyek a sorokat és oszlopokat egyenlőképen átalakítják. Ezek által azonban a rendszer pozitív és negatív indexe nem változik, vagy a mi ugyanaz, a pozitív és negatív négyzetek száma, a melyekbe a homogénnek tett quadrátikus  $F$  alak, azaz

$$(5) \quad ax_0^2 + 2\sum b_{0k}x_0x_k + \sum c_{ik}x_ix_k$$

transzformálható, minden itt fellépő transzformációnál invariáns. Ugyanez áll azonban a belső ( $c_{ik}$ ) rendszer indexei számára külön is, vagyis a pozitív és negatív négyzetek számára is, melyekbe

$$(5a) \quad \sum c_{ik}x_ix_k$$

quadrátikus alak transzformálható, mert az, mint fentebb említettük, önmagában transzformáltatik. Ha végre az egész alakot egy pozitív állandóval szorozzuk, e két index változatlan marad; ellenben helyet cserél e két index mindkét alaknál, ha ezeket valamely negatív állandóval szorozzuk. Ha az  $\begin{pmatrix} a, b \\ b, c \end{pmatrix}$  és  $(c)$  alak signaturáit  $\{a, b, c\}$  és  $\{c\}$  jelekkel látjuk el, úgy ezek és  $I_0 = \{a, b, c\} - \{c\}$  és  $I_1 = \{c\}$  az alakok minden transzformációjára invariánsok; két redukált alak tehát csak úgy lehet æquivalens, ha ez a két invariánsuk is egyenlő. Mind a három típusnál

$$I_1 = \{c\} = |\rho - \rho'|,$$

sőt I. és III.-nál, mivel ott  $\rho \geq \rho'$ , írhatjuk

$$I_1 = \rho - \rho'.$$



E két osztályhoz tartozó alakoknál

$$J_1 = [c] = \rho + \rho', \quad I_1 = \{c\} = \rho - \rho'$$

csak akkor egyezők, ha  $\rho$  és  $\rho'$  egyenlőek, azaz ha a két alak identikus.

A II. osztályhoz tartozó alakoknál

$$I_0 = \{a, b, c\} - \{c\} = |\rho - \rho' + 1| - |\rho - \rho'| = \pm 1$$

a mint  $\rho \geq \rho'$  vagy  $\rho < \rho'$ , ezekenél tehát

$$I_0 I_1 = \rho - \rho'.$$

Mint hogy már most mindama alakok számára, melyeknél  $\rho + \rho'$  ugyanoly értékű,  $I_0 I_1 = \rho - \rho'$  csupa különböző értéket vesz fel, ezek sem æquivalensek egymás között.

Minden nem homogén quadratikussal alak tehát az I., II., III. alakok csak egyikével æquivalens és így nyerjük a következő tételt:

$$\text{Két } F = a + 2 \sum b_{0k} x_k + \sum c_{ik} x_i x_k$$

és

$$F' = a' + 2 \sum b'_{0k} x_k + \sum c'_{ik} x_i x_k$$

felület csak akkor tartozik ugyanahoz az osztályhoz, ha mindkettő számára ugyanoly értékű a következő négy invariáns:

$$J_0 = [a, b, c] - [c], \quad I_0 = \{a, b, c\} - \{c\}$$

$$J_1 = [c], \quad I_1 = \{c\}.$$

E mellett megjegyezzük, hogy  $J_0 = 0$  és  $J_0 = 2$  számára  $I_1$  elhagyható, mert már újabb megkülönböztetést nem adhat,  $I_0 = 1$  esetén pedig  $I_0$  és  $I_1$  pótolható  $I_0 I_1$  szorzat által, úgy hogy minden esetben csak három invariánst kell megvizsgálnunk.

Az egyes osztályokban már most a redukált alakok számát megolvashatjuk. Az első osztályú alakok száma  $A_1$  egyenlő ama  $\rho, \rho'$  számpárok összegével, melyeknek összege  $\leq n$  és a hol  $\rho \geq \rho'$ . Ha  $n = 2\nu$  páros szám,

$n=2\nu$  összegben szerepelhet  $\rho$   $\nu+1$ -féle képen

$n=2\nu-1$  " "  $\nu$  "

$n=2\nu-2$  " "  $\nu$  "

$n=2\nu-3$  " "  $\nu-1$  "

$n=2\nu-4$  " "  $\nu-1$  "

. . . . .

$n=3$  " " 2 "

$n=2$  " " 2 "

$n=1$  " " 1 "

$n=0$  " " 1 "

összesen tehát

$$A_1 = \nu + 1 + 2 \cdot \frac{\nu}{2} (\nu + 1) = (\nu + 1)^2 = \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 = \left(\frac{n+2}{2}\right)^2.$$

Ha  $n=2\nu+1$ , a  $(\nu+1)$  is kétszer fordul elő, úgy hogy

$$\begin{aligned} A_1 &= 2 \cdot \frac{\nu+1}{2} (\nu+2) = \left(\frac{n-1}{2} + 1\right) \left(\frac{n-1}{2} + 2\right) = \\ &= \frac{(n+1)(n+3)}{4} = \frac{(n+1)^2 - 1}{4}. \end{aligned}$$

E két szám egyesíthető az  $E\left(\frac{(n+2)^2}{4}\right)$  jelzés alatt, a hol  $E(a)$

az  $a$  törtben foglalt legnagyobb egész számot jelenti.  $A_3$  számot megkapjuk, ha  $A_1$ -ben  $n$  helyébe  $(n-1)$ -et teszünk, tehát

$$A_3 = E\left(\frac{(n+1)^2}{4}\right).$$

Mint hogy pedig vagy  $n+1$  vagy  $n+2$  páros, tehát négyzete négygyel osztható

$$A_1 + A_3 = \frac{(n+2)^2 + (n+1)^2 - 1}{4} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

A II. típusra redukált alakoknál  $A_2$  ama nem negatív  $\rho, \rho'$  szám-párok összege, melyeknek összege  $\leq n$ .



Ha az összeg  $n$ ,  $\rho$  felvehet  $n+1$  értéket

"	$n-1$	"	$n$	"
"	$n-2$	"	$n-1$	"
	....		....	
"	2	"	3	"
"	1	"	2	"
"	0	"	1	"

tehát összesen

$$\frac{n+1}{2} (n+2) = A_2.$$

Az  $A_1 + A_2 + A_3$  összeg, vagyis a redukált alakok osztályszáma pedig  $= (n+1)(n+2)$ ; *annyi másodrendű felület van tehát az  $n$ -dimenziós térben, melyek valós véges koordinátatranszformációval egymásba át nem vezethetők.*

Mindjárt itt jegyezzük meg, hogy abban a számban a nem tulajdonképeni másodrendű felületek, melyek semmi másodrendű tagot nem tartalmaznak, is benne foglaltatnak. Ha tekintetbe veszszük, hogy minden lineáris transzformációnál a belső  $(c_{ik})$  rendszer önmagában változik, hogy tehát csupa elenyésző tagokkal bír, ha egyáltalában vannak ilyenek benne, könnyen megismerhetjük, hogy három ily nem tulajdonképeni quadratikussal alak van és pedig a három typusból egyenként

$$1) 0=0, \quad 2) 1=0, \quad 3) 2\xi_1=0,$$

melyek sorra az egész  $n$ -dimenziós tért, a tér összes végtelen pontjait és a tér egy  $(n-1)$ -szeres sík sokaságát képviselik. A tulajdonképeni másodrendű felületek száma tehát

$$(n+1)(n+2) - 3 = n^2 + 3n - 1 = n(n+3) - 1.$$

★

Az eddigi osztályozásnál csak az  $f$  alak együtthatórendszere volt mérvadó. Ki akarjuk már most mutatni, hogy az eme redukált három typusnak megfelelő felület osztályok geometriailag is igen közel vonatkozásban állanak egymáshoz.



Az  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  másodrendű felületnek  $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  pont akkor középpontja, ha ez a felületre nézve szimmetrikusan fekszik, azaz, hogy  $(\eta_1 + y_1, \eta_2 + y_2, \dots, \eta_n + y_n)$  pont akkor fekszik az  $f = 0$  felületen, ha  $(\eta_1 - y_1, \eta_2 - y_2, \dots, \eta_n - y_n)$  pont is rajta fekszik. Minthogy akkor az  $f(\eta_i + y_i) = 0$  és  $f(\eta_i - y_i) = 0$  másodrendű felületek ugyanazokat a pontokat tartalmazzák, áll a következő identitás:

$$f(\eta_1 + y_1, \eta_2 + y_2, \dots, \eta_n + y_n) = \lambda f(\eta_1 - y_1, \eta_2 - y_2, \dots, \eta_n - y_n),$$

a hol  $\lambda$  egy zérustól különböző állandó. Ha mind a két oldalt az  $y_i$  hatványai szerint kifejtjük, nyerjük a következő feltételei egyenletet arra, hogy  $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  pont középpont

$$\begin{aligned} f(\eta_1, \dots, \eta_n) + \sum_i y_i \frac{\partial f(\eta_1, \dots, \eta_n)}{\partial \eta_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2 f(\eta_1, \dots, \eta_n)}{\partial \eta_i \partial \eta_k} y_i y_k = \\ = \lambda \left[ f(\eta_1, \dots, \eta_n) - \sum_i y_i \frac{\partial f(\eta_1, \dots, \eta_n)}{\partial \eta_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2 f(\eta_1, \dots, \eta_n)}{\partial \eta_i \partial \eta_k} y_i y_k \right]. \end{aligned}$$

Ha  $f = 0$  egy tulajdonképeni másodrendű felület, melyben tényleg vannak másodrendű tagok, tehát a  $\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k}$  együtthatók nem tűnnek el mind, akkor a feltételegyenlet csak úgy állhat fenn, ha  $\lambda = 1$ , és

$$\frac{\partial f}{\partial \eta_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Tehát  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  pont a másodrendű felület középpontja, ha

$$b_{10} + c_{11}\eta_1 + c_{12}\eta_2 + \dots + c_{1n}\eta_n = 0$$

$$b_{20} + c_{21}\eta_1 + c_{22}\eta_2 + \dots + c_{2n}\eta_n = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$b_{n0} + c_{n1}\eta_1 + c_{n2}\eta_2 + \dots + c_{nn}\eta_n = 0$$

vagyis  $\eta_i$  pont akkor középpontja a másodrendű felületnek, ha  $f(x_i) = f(\eta_i + y_i)$  másodrendű nem homogén függvényben minden elsőfokú tag  $= 0$  és a középpont rajta fekszik a felületen, ha  $f(\eta_1, \dots, \eta_n) = 0$ , nem fekszik rajta, ha  $f(\eta_1, \dots, \eta_n) \leq 0$ .



Ha  $f=0$  egy sík, tehát minden másodfokú tag  $=0$ , akkor a föltétegyenlet  $\lambda=-1$ ,  $f(\eta_1 \dots \eta_n)=0$ , azaz, a síknak minden pontja egyúttal az itteni értelemben középpontja.

Ki fogjuk már most mutatni, hogy ezek a középpontok egy tetszőleges

$$x_i = a_{i0} + \sum a_{ik} x_k$$

koordinátatranszformáczióval nem változnak.

Legyenek  $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \dots, \bar{\eta}_n)$  az  $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  pontnak a koordinátatranszformáció után megfelelő pontnak koordinátái, ha tehát általánosságban  $\eta_i = a_{i0} + \sum a_{ik} \bar{\eta}_k$ , akkor  $(\bar{\eta}_1 \dots \bar{\eta}_n)$  pont a transzformált  $\bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)=0$  felületnek középpontja, mert számára az új  $\bar{y}_k = \bar{x}_k - \bar{\eta}_k$  változók az eredeti  $y_i = x_i - \eta_i$  változókkal az előbbi két egyenletből kiadódó megfordítható homogén lineár  $y_i = \sum a_{ik} \bar{y}_k$  transzformációval függnek össze.

A transzformált alakban az elsőfokú tagok tehát akkor és csak akkor hiányzanak, ha az az eredeti alaknál is úgy volt. Minthogy végre  $f=0$  és  $a \cdot f \neq 0$  felületek középpontjai nyilván mindig ugyanazok, a következő tételt nyerjük:

*Ha két felület ugyanahoz az osztályhoz tartozik, azaz ha pontjaik lineár koordinátatranszformáció révén egymásba mennek át, akkor középpontjaik ugyanazon transzformációval mennek át egymásba.*

Tehát csak a következő felületeknek középpontjait kell vizsgálni:

$$(I') \quad x_1^2 + \dots + x_{\varrho}^2 - x_{\varrho+1}^2 - \dots - x_{\varrho+\varrho'}^2 = 0.$$

$$(II') \quad 1 + x_1^2 + \dots + x_{\varrho}^2 - x_{\varrho+1}^2 - \dots - x_{\varrho+\varrho'}^2 = 0.$$

$$(III') \quad x_1^2 + \dots + x_{\varrho}^2 - x_{\varrho+1}^2 - \dots - x_{\varrho+\varrho'}^2 + 2x_{\varrho+\varrho'+1} = 0.$$

Ezek megfelelnek a redukált I., II. és III. alaknak és csak  $x_1, \dots, x_n$  szerinti deriváltjaikat kell  $=0$  tenni és ebből az  $n$  lineáris egyenletből a középpontok koordinátáit meghatározni.

Az (I') típusnál  $x_1 = x_2 = \dots = x_{\varrho+\varrho'} = 0$  a míg  $x_{\varrho+\varrho'+1}, \dots, x_n$  tetszőleges. A középpontok tehát egy  $n - (\rho + \rho')$ -rendű sokaságot töltenek be és mind a felületen fekszenek; a (II') típusnál



ugyanaz áll, csakhogy a középpontok mind rajta kívül fekszenek. A (III') typushoz tartozó felületeknek végre nincs középpontjuk a végesben, mert itt a többi egyenlethez hozzájárul még a következő

$$\frac{\partial f}{\partial x_{q+q'+1}} = 0 \text{ azaz}$$

$2=0$ , melyet véges érték ki nem elégít.

Nyerjük tehát a következő tételt:

*Valamely másodrendű felületnek középpontjai vagy mind rajta fekszenek, vagy mind kívülre vagy mind a végtelenben, a szerint a mint  $J_0=0, 1$  vagy  $2$ . Az első két esetben a középpontok egy  $(n-J_1)$ -edrendű sokaságot képeznek.*

Nevezzük a felületeket e szerint első és másodrendű középontos felületeknek és parabolikus felületeknek. Ha tekintetbe vesszük, hogy a beosztásunk az eredetivel összeesik és hogy minden typusból egy redukált alak elhagyandó, mely nem fejez ki tulajdonképeni másodrendű felületet, lesz:

$$A_1 = E\left(\frac{n+2}{2}\right)^2 - 1$$

$$A_2 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = 1$$

$$A_3 = E\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right) - 1.$$

Befejezésül mutassuk be a 9 kúpszelet és 17 másodrendű felület osztályozását a négy invariánsuk szerint.



## I. Kúpszeletek.

$J_0$	$J_1$	$I_0$	$I_1$	Redukált alak	Jelentés	Közép- pont
$=0$ $A_1 = \frac{16}{4} - 1 = 3$	1		1	$x^2 = 0$	kettős egyenes	Y tengely
	2		2	$x^2 + y^2 = 0$	két imag. egyenes	középpont
	2		0	$x^2 - y^2 = 0$	valós egyenespár	középpont
$=1$ $A_2 = \frac{3.4}{2} - 1 = 5$	1	1	1	$1 + x^2 = 0$	két    imag. egyenes	Y tengely
	2	1	2	$1 + x^2 + y^2 = 0$	imag. ellipsis	középpont
	2	1	0	$1 + x^2 - y^2 = 0$	valós hyperbola	középpont
	1	-1	1	$1 - x^2 = 0$	két valós    egyenes	Y tengely
	2	-1	2	$1 - x^2 - y^2 = 0$	valós ellipsis	középpont
$A_3 = E\left(\frac{9}{4}\right) - 1 = 1$	1		1	$x^2 + 2y^2 = 0$	parabola	$\infty$

## II. Másodrendű felületek.

$J_0$	$J_1$	$I_0$	$I_1$	Redukált alak	Jelentés	Közép- pont
$=0$ $A_1 = E\left(\frac{25}{4}\right) - 1 = 5$	1		1	$x^2 = 0$	kettős sík	yz sík
	2		2	$x^2 + y^2 = 0$	két imag. sík	Z tengely
	2		0	$x^2 - y^2 = 0$	két valós sík	Z tengely
	3		3	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	imag. kúp	kezdőpont
	3		1	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$	valós kúp	kezdőpont
$=1$ $A_2 = \frac{4.5}{2} - 1 = 9$	1	1	1	$1 + x^2 = 0$	két    imag. sík	yz sík
	2	1	2	$1 + x^2 + y^2 = 0$	im. ell. henger	Z tengely
	3	1	3	$1 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$	imag. ellipsoid	kezdőpont
	1	-1	1	$1 - x^2 = 0$	két    reell sík	yz sík
	2	1	0	$1 + x^2 - y^2 = 0$	hyp. henger	Z tengely
	2	-1	2	$1 - x^2 - y^2 = 0$	ellipt. henger	Z tengely
	3	1	1	$1 + x^2 + y^2 - z^2 = 0$	kétágú hyperbol.	kezdőpont
	3	-1	1	$1 + x^2 - y^2 - z^2 = 0$	egyágú hyperbol.	kezdőpont
	6	-1	3	$1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$	ellipsoid	kezdőpont
$=2$ $A_3 = \frac{16}{4} - 1 = 3$	1		1	$x^2 + 2y = 0$	parab. henger	$\infty$
	2		2	$x^2 + y^2 + 2z = 0$	ellips. paraboloid	$\infty$
	2		0	$x^2 - y^2 + 2z = 0$	hyp. paraboloid	$\infty$

Kopp Lajos.



## ADALÉK A KAMATSZÁMOLÁS ELMÉLETÉHEZ.

(Első közlemény.)

Az idegen tőke használatáért kölcsöndíjat szoktak fizetni, mely a tőkéhez csatolva, annak értékét egyre növeli. A tőke értékét ennél fogva úgy foghatjuk fel, mint az időnek függvényét. Ha tehát egy derékszögű koordináta-rendszer abszcissái az időt, ordinátái a tőke értékét jelentik, akkor a tőkének összefüggését az idővel egy görbe vonal fogja ábrázolni.

A lehetséges megállapítások közül, melyeket a tőke változásának sebességére nézve tehetünk, kettőt óhajtunk behatóbban tárgyalni:

Legyen az első esetben e sebesség a kölcsön egész tartama alatt arányos a tőke kezdetleges értékével, a második esetben pedig változzék az illető időpontig felszaporodott érték arányában:

$$\frac{dy}{dx} = y_0 p \quad 1)$$

és

$$\frac{dy}{dx} = yr, \quad 2)$$

hol  $y_0$  a tőke értéke az  $x=0$  időpontban,  $p$  és  $r$  pedig állandók. A két differenciálegyenletet integrálván, az

$$y = y_0 (1 + px) \quad 3)$$

és

$$y = y_0 e^{rx} \quad 4)$$

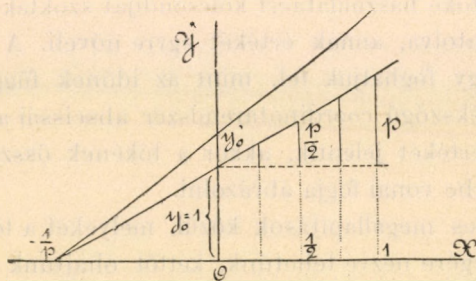
egyenleteket kapjuk, hol  $e$  a természetes logaritmusok alapszáma.



A 3) alatti képlet az *egyszerű kamatszámolásnak*, a 4) alatti a *folytonos tőkésítésnek* képlete.

Ha a 3) alatti képletben  $x=1$  és  $y_0=1$ , akkor  $y=1+p$ , tehát  $p$  a tőkeegységnek az időegységre eső növekedése, kamatja, vagyis a *kamatláb*, illetőleg annak 100-adrésze, mert a gyakorlat 100 pénzegységet vesz fel tőkeegységül.

Geometriailag véve az  $y=y_0(1+px)$  egyenlet egyenes vonalat jelent, mely az  $x$  tengelyből  $-\frac{1}{p}$ , az  $y$  tengelyből  $y_0$  darabot metsz el. Az előbbi lemetezett rész megmarad akkor is, ha a kezdő ér-



1. ábra.

téket megváltoztatjuk, de a kamatlábat megtartjuk. Ha az időegységet  $n$ -szer kisebbre vesszük, úgy hogy a numerikus kamatozási idő  $n$ -szer nagyobb lesz, akkor

$$y = y_0(1 + px) = y_0 \left( 1 + \frac{p}{n} \cdot nx \right)$$

értelmében a kamatlábat  $n$ -szer kisebbre kell vennünk, hogy ugyanazon végértéket kapjuk. Így jutunk a *relatív kamatlábak* fogalmára, melyek az egyszerű kamatszámolásnál egyenértékűek; ilyenek évi 4%, félévi 2%, negyedévi 1% stb. (1. ábra).

A folytonos tőkésítésnek  $y = y_0 e^{rx}$  görbéje, a logaritmikus görbe; e helyen csak azon ágát vesszük tekintetbe, melynek abszcissái pozitívak. E görbe aszimptotája az  $x$  tengely, mert  $x = -\infty$ -re az  $y = 0$ ; folyton emelkedve az  $y$  tengelyből  $y_0$  darabot metsz le. Ha  $r$ -et parameternek tekintjük, egy vonalrendszert ka-



punk, melynek minden görbéje az  $x=0$ ,  $y=y_0$  pontban metszi egymást.

Ha

$$r = p,$$

akkor az egyenes a  $(0, y_0)$  pontban érinti a görbét, mert e pontra nézve mindkét esetben

$$\frac{dy}{dx} = y_0 p.$$

Az  $r$  tehát azon egyeneshez tartozó kamatláb, mely az

$$y = y_0 e^{rx}$$

görbét a  $(0, y_0)$  pontban érinti. (2. ábra).

A pillanatnyi kamatláb e geometriai interpretációját már BERNOULLI JAKAB adta, a ki először foglalkozott a folytonos tőkésítéssel (Acta Eruditorum, 1690).

E szerint a két vonal az időelem alatt együtt halad, vagyis a tőkeegység az időegység alatt  $r$  kamatot hozna, mint az egyszerű kamatszámolásnál, ha itt is az egész időegység alatt a tőkeegység után számítanók azt. Az érintkezési ponttól kezdve a két vonal egyre jobban távozik egymástól, mint két tömeg, melyek egyenlő sebességgel indultak ugyan el, de az egyiknek mozgása egyenletes, a másiké gyorsuló.

★

Válaszszuk ki a rendszerből azt a görbét, melynél  $r$  numerikus értéke valamivel kisebb mint  $p$  és azon tulajdonsággal bír, hogy az

$$y = y_0(1 + px)$$

egyenest  $x=1$  ordináta mentén messe (2. ábra), ekkor

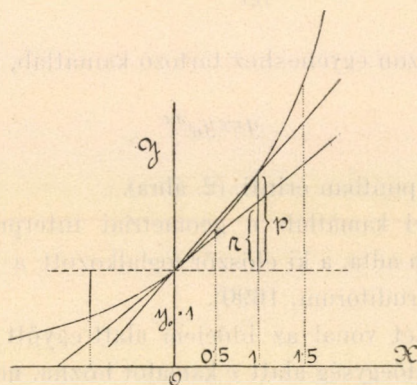
$$e^r = 1 + p \quad \text{vagy} \quad r = l(1 + p).$$

E feltétel alatt  $x$ -nek minden értékére nézve

$$y = y_0 e^{rx} = y_0 (1 + p)^x. \quad 5)$$



Az utóbbit nevezik a *kamatos kamatszámolás alapképletének*, mely közvetítő szerepet játszik a folytonos tőkésítés és az egyszerű kamatszámolás formulái közt; mert míg egyrészt ugyanazt az értéket adja mint a folytonos tőkésítés, másrészt a benne szereplő kamatláb ugyanazt jelenti mint az egyszerű kamatozásnál, t. i. a tőkeegységnek az időegységre eső kamatját. A két egyenértékű kamatláb közti összefüggést e képletek adják meg:



2. ábra.

$$r = l(1+p) = p - \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{3} + \dots$$

és

$$p = e^r - 1 = \frac{r}{1} + \frac{r^2}{1 \cdot 2} + \frac{r^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots;$$

így ha

$p$	$r$
0.0400	0.0392
0.0200	0.0198
0.0408	0.0400
0.0202	0.0200

★

A folytonos tőkésítés formulája tehát egyszerű helyettesítéssel átalakítható a kamatos kamatszámolás formulájává és viszont. E két formula ennél fogva teljesen egyenlőrangú.



Ezen eredmény az első pillanatra meglepő, mert a kamatos kamatszámolás formulájának szokásos levezetésénél csak az *időszakos tőkésítés elvét* alkalmazzák és a folytonos tőkésítést szóba sem hozzák; azért is szükségesnek tartom, hogy e két elv összefüggését jobban megvilágítsam.

Midőn az alapképletet *egész számú időszakokra* vezetjük le, tényleg nem kell mást feltételeznünk, mint azt, hogy minden időegység alatt összegyűlt kamat, az időszak végén a tőkéhez csatoltatik és már a következő időszakban vele egyforma mértékben kamatozik.

Görbe vonalunkon ezen esetben egyes izolált pontokat kapunk és tetszésünktől függ, milyen görbe vonallal kössük össze ezeket, mert sem a kamatláb fogalma, sem az időszakos tőkésítés elve, a mennyiben az csak minden időegység végén alkalmaztatik, semmi felvilágosítást sem nyújt arra nézve, mily módon gyűlt össze a kamat az időegység végeig. A legegyszerűbb, ha egyenesekkel kötjük e pontokat össze, vagyis, ha az időegység tört részeire a felkamatolt érték után egyszerű kamatokat számítunk, a mint ezt a takarékpénztárak a betétekre nézve teszik. Az így keletkezett «vegyes képletet» azonban, a mint látni fogjuk, csak oly közelítő képletnek tekinthetjük mint az egyszerű kamatszámolás formuláját és tört időszakokra való alkalmazásának is ugyanoly határokat kell szabnunk.

A kamatos kamatszámolás alapképlete e szerint egész időszakokra a folytonos tőkésítés elvétől függetlenül is érvényes. *Tört kitevőkre* ez azonban már nem áll. Mert ekkor az időszakos tőkésítést nemcsak minden időegység végén, hanem az időegység tetszőleges  $n$ -edrészeiben is alkalmaznunk kell. A szokásos «bebizonyítás» t. i. ha a tört nevezője  $n$ , kénytelen az időegységet  $n$  egyenlő részre bontani és feltételezni azt, hogy ha az időegység  $n$ -edréseiben a kamatláb  $p_n$ , akkor az a többi  $n$ -edrészekben is akkora, és hogy az időegység alatt a kamat úgy gyűlik össze, hogy egy időszakon át felszaporodott érték a következő időszak alatt ismét  $p_n$  kamatlábbal kamatozik.

E feltétel azonban, melyet hallgatagon tesznek meg, ha vég-



telen kis időrészt veszünk fel, nem egyéb mint a folytonos tőkésítés elve.

Az időszakos tőkésítés elve, mint azt előre láthattuk, feltételezi a folytonos tőkésítést, de viszont, ha a folytonos tőkésítés hatását egyes időszakok alatt összefoglaljuk, az időszakos tőkésítésre jutunk, mert a (2) és (4) alatti egyenletekből

$$\int_{y_0}^y dy = \int_0^x y_0 r e^{rx} dx,$$

honnan

$$y - y_0 = y_0 \int_0^1 r e^{rx} dx + y_0 \int_1^2 r e^{rx} dx + y_0 \int_2^3 r e^{rx} dx + \dots + \\ + y_0 \int_{m-1}^m r e^{rx} dx + y_0 \int_m^x r e^{rx} dx,$$

hol  $m$  az  $x$ -ben foglalt legnagyobb egész szám.

Ha itt az első integrál értékét, vagyis a tőkeegységnek az időegység alatti kamatját  $p$ -vel jelöljük, a következő egyenletet kapjuk:

$$y - y_0 = y_0 p + y_0 (1+p) p + y_0 (1+p)^2 p + \dots + \\ + y_0 (1+p)^{m-1} p + y_0 (1+p)^m [(1+p)^{x-m} - 1],$$

a miből kitűnik, hogy a folytonos tőkésítés az első időegység alatt a kezdőérték kamatját hozza létre, a második időegység alatt az addig felszaporodott érték kamatját stb.

A  $p$  kamatlábat tekintettel fennebbi származtatására *átlagos kamatlábnak* is lehetne nevezni.

Míg tehát egyrészt az időszakos tőkésítés elve tetszőleges kis időtartamra alkalmazva a folytonos tőkésítéshez vezet, másrészt a folytonos tőkésítés az időszakit teljesen pótolhatja.

Az időszakos tőkésítés elvét már STEVIN mint ismereteset tárgyalja 1634-ben összegyűjtött munkáiban, sőt kamatos kamattáblázatokat is ad. LEIBNITZ úgy látszik tőle függetlenül jött rá (Acta Eruditorum, 1683). A jogtudósok azonban a törvény azon tilalma alapján, hogy kamatok után kamatokat szedni nem sza-



bad, sikra szálltak ellene, azért is csak hosszú idő múlva került használatba. Tört kitevőkre való alkalmazását D'ALEMBERT ajánlotta enciklopédiájában. A geometriai ábrázolások nagyrésze LÉON MARIE-nak «*Traité mathématique et pratique des opérations financières*» című munkájában található.

*Juckel Gyula.*



## A LÉGKÖR ÚJ GÁZAIRÓL.

LORD RAYLEIGH és W. RAMSAY 1894 aug.-ban jelentették, hogy a légkörben új gázt fedeztek fel, melynek *argon* nevet adtak. Azóta az argon physikai és chemiai tulajdonságait, előfordulásának módját és arányát megállapították. \* Ismeretes továbbá az is, hogy miközben az argon vegyületeit keresték, egy másik új elemre bukkantak: ez volt a *helium*, \*\* melyről azóta kiderült, hogy a légkörben is előfordul. A légkörből nyert argon némely rendkívüli tulajdonságai arra mutattak, hogy az nem egyszerű test, hanem több más gáz keveréke. Valóban W. RAMSAY-nek és assistensének TRAVERS-nek sikerült a légkörben még négy új gázt felfedezni, melyeknek a következő neveket adták: *krypton*, *metargon*, *neon* és *xenon*. E felfedezésekkel a levegő összetételére vonatkozó ismereteink tetemesen kibővültek, hiszen az argon nem is oly minimális mennyiségben van jelen a légkörben, hogy elhanyagolható járuléknak tekintsük. Ismeretes, hogy a légkör alkotórészei között a vízgőz és a szén-sav mennyiségét föl szokás sorolni, pedig az argon háromszor nagyobb mennyiségben fordul benne elő, mint a vízgőz és 30—100 szorosán nagyobb mennyiségben, mint a szén-sav. A chemia is hat új elemmel gazdagodott, a mi magában véve is érdekes eredmény. Ezen elemek érdekessége és fontossága még növekszik, ha meggondoljuk, hogy olyan tulajdonsággal vannak felruházva, melylyel az eddig ismert elemek egyike sem dicsekedhetik. A *helium* kivételével, a többi öt új elem, különösen az argon, a legnagyobb fokú chemiai tértlenséget mutatja, melynélfogva vegyülésre semmi úton sem bír-

\* Math. és Phys. Lapok 1895. IV. k. 155—160. l.

\*\* Math. és Phys. Lapok 1898. VII. k. 305—310. l.



hatók. Ezen elemek a Föld megszilárdulása óta részt vettek a légkörben, de minden rajta végbemenő átalakulásnak, melyekből pedig az oxigén, nitrogén, szénsav és vízgőz bőven ki vette a maga részét, tétlen szemlélői voltak.

E felfedezések abszolút értéke a chemikusok előtt bizonyára nagy fontossággal bír, de ha tekintetbe vesszük genezisüket, az alkalmazott gondolatmenetet és a használt kísérleti módszereket, a physikusok, sőt a matematikusok előtt azok legalább olyan, vagy talán még nagyobb fontosságot nyernek. Itt láthatjuk a modern tudományos szellem munkáját, látjuk az eszme keletkezését, kifejlődését és diadalát. *Nem a kísérleti esetlegesség hozta létre az argont, hanem a szigorúan logikus gondolatmenet,* mely a megismert tényekből dedukál, deductióinak eredményeit évek során át próbának veti alá és mikor teljes bizonyosságra jut, lép velük a világ elé. Ily szempontból fogva fel, nem lesz többé különös, hogy a modern kémia ezen nagy vívmányait egy elméleti physikus hozta létre. Megértjük belőle továbbá azt is, hogy a kémia és a physika jelenségei úgy módszer, mint gondolatmenet tekintetében oly szorosán összekapcsolvák, hogy egymástól el sem választhatók. E sorok ezélja az új légköri gázok felfedezésének történetét ebből a szempontból elmondani.

Lord RAYLEIGH\* a kémiai elméletek szempontjából igen szükségesnek tartotta a főbb gázok sűrűség-meghatározásait revisiónak vetni alá. Hiszen a gázok sűrűségéből vezetik le a molekulasúlyt, mely úgy a kémiában, mint a physikában igen nagy szerepet játszik. Szándékát és tervét 1882-ben jelentette be a British Associationnek. Először is meghatározta az oxigén sűrűségét, melyet 15.82-nek állapított meg, ha a hydrogénét egységnek vesszük. Áttért azután a nitrogénre; feltűnt neki, hogy a kémiai úton nyert nitrogén sűrűsége, bármi úton állítja is elő, mindig kisebb, mint a légkörből nyerté. A kémiai nitrogén 1 literjének súlya 1.2505 gr.

\* Érdekes megemlíteni, hogy RAYLEIGH saját költségén laboratóriumot rendezett be magának, hol minden hivatalos kötelességtől menten tisztán a tudománynak élhessen. Csak újabb időben adja elő a physikát a Cambridge-i egyetem Trinity College-ében.



és a légkörié 1.2572. Az eltérés körülbelől 7 mgr., tehát csak a harmadik tizedesben kezdődik. Mi ezen eltérés magyarázata?

Kétségtelenül a legközelebbi feltevés az, hogy a légköri nitrogén nem tiszta, hanem annak valami súlyosabb gázzal való keveréke. E feltevés azonban az addigi felfogással ellenkezésben állott, hiszen a chemikusok finomított, analízáló módszereikkel az anyag legpárányibb mennyiségét is ki tudják mutatni; hogyan kerülte volna el tehát figyelmüket ez az anyag, mely mégis jelentékeny mennyiségben kell hogy jelen legyen a légkörben. Ezen feltevést tehát csak utolsó refugiumképen akarta használni, akkor, ha a jelenségről más úton nem tudna számot adni. Egyelőre csak az adatokat gyűjtötte, a különböző úton nyert nitrogének sűrűségeit újból és újból pontosan meghatározta. Ez a munka eltartott több mint tíz évig. De az eredmény mindig csak az volt: a *légköri nitrogén súlyosabb, mint a kémiai*.

Meg akarta tudni, hogyan magyarázzák ezen anomaliát a chemikusok; kétségtelenül e célból társult W. RAMSAY-vel. A chemikusok ahhoz a magyarázathoz folyamodtak, melylyel újabb időben sok anomaliát magyaráznak, t. i. a dissociatio jelenségekhez. E szerint a kémiai nitrogén molekulái készítés közben dissociatiót szenvednek, vagyis szétválnak atómokra. Már pedig AVOGADRO törvénye szerint egyenlő nyomás mellett egyenlő térfogatokban egyenlő számú molekula van; ha bizonyos térfogatban egy molekula szét-esik, akkor a gáz térfogatának nagyobbodnia kell, vagyis egyenlő térfogatban immár kevesebb számú teljes molekula lesz, tehát a gáz könnyebbé válik. Ez a feltevés RAYLEIGH előtt nagyon valószínűtlennek látszott; hiszen igaz, hogy a nitrogén diatomikus, de ezen atómok között működő kémiai vonzás igen nagy, mert a nitrogén nehezen vegyül más testekkel. Azonban annak daczára, hogy semmi eredményt nem várt, kísérletileg győződött meg, fennállhat-e ez a feltevés.

Ha a kémiai úton előállított nitrogén dissociatiót szenvedett, akkor hosszabb idő múlva a dissociatio fokának meg kell változnia, a mint az más dissociált anyagokkal is így történik; az atómnak újból molekulává kell egyesülniök, a gáz sűrűségének tehát na-



gyobbodnia kell. Ilyet azonban nem tapasztalt. Még tovább ment : elősegítette a dissociált atómok egyesülését. Ismeretes, hogy az oxigén, mely diatomikus, az elektromos kisülések hatása alatt triatomikus ( $O_3$ ) lesz, mely alakban *ozon* néven ismeretes. Az elektromos kisülés tehát elősegíti a dissociatio visszafejlődését : a kémiai nitrogénre azonban semmiféle hatást sem gyakorolt. Ez az anyag nem lehet dissociált állapotban. A hypothezist el kellett vetni.

Maradt még egy kémiai hypothezis, mely azt mondja, hogy a légköri nitrogén a kémiai nitrogénnek oly válfaja, mint az ozon az oxigénnek, a mivel amannak súlyosabb volta meg volna magyarázva. Néhány kísérletezőnek állítólag sikerült is az egyiket a másikból létre hozni, azonban ez az állapot semmiképen sem volt állandó, a hőmérsékletváltozást nem állotta ki. A légköri nitrogén pedig egészen állandó állapotú, hőmérsékletemelésre sem változik. Így ezt a hypothezist is el kellett vetni.

Nem maradt más hátra, mint a legelső legtermészetesebb magyarázat : a légköri nitrogén sűrűsége azért nagyobb, mert valamely súlyosabb gáz van hozzája keverve. Mi legyen ez a gáz ? Tulajdonságai közül előre is világos volt az, hogy vegyülésre csak nehezen, vagy épen nem bírható, hiszen a nitrogén előállításában közben alkalmazott módszerek valamelyike az ismert gázok bármelyikét redukálta volna. Ez a gáz nem lehet az ismert gázok egyike sem, tehát egészen új vegyület vagy elem. Valószínű, hogy elem. Az argon tehát Lord RAYLEIGH és társának képzeletében előbb élt, mint elő birták állítani. Ez a deductio diadala, «a harmadik tizedes győzelme», mint azt Lord RAYLEIGH mondta. Olyan rangú eredmény, mint LEVERBIER-é, mikor a Neptunus bolygó létét, helyét, pályáját, nagyságát előre kiszámította.

RAYLEIGH és RAMSAY biztosak voltak abban, hogy új és ismeretlen testtel van dolguk ; a feladat már most az volt : tényleg elő is állítani, csöben felfogni, sűrűségét és egyéb physikai állandóit meghatározni. Tudván előre, hogy az argon vegyülésre nem bírható, nem volt más tenni valójuk, mint a nitrogént tőle megszabadítani. A nitrogént redukálni több úton lehet ; az egyik mód elektromos szikra segítségével történik bőséges oxigén jelenlétében ; egy másik



mód úgy megy végbe, hogy a nitrogént igen magas hőmérsékleten lévő fémekkel (magnesium) vegyülésre bírják. RAYLEIGH és RAMSAY mindkét módszert megpróbálta.

A tudomány története szempontjából érdekes, hogy CAVENDISH már mintegy száz évvel előbb ugyanezen kísérletet végrehajtotta. CAVENDISH felvetette magában azt a kérdést, hogy a levegőbeli nitrogén egész tömegében ugyanazon test-e, vagy inkább több testnek a keveréke. «Kísérlet alá vetettem, — mondja CAVENDISH, — hogy megtudjam, vajjon a légköri nitrogén bizonyos mennyisége egészen átalakítható-e salétromsavvá, vagy talán marad egy különböző rész, mely ezen átalakulásba nem megy bele».

A kísérlet abból állott, hogy meghatározott mennyiségű levegőn keresztül elektromosságot sűtött ki, a végből, hogy az oxigént a nitrogénnel vegyülésre bírja. Mikor az oxigén már elfogyott, nagy mennyiségű tiszta oxigént kevert hozzá és az elektromosság kisülését addig folytatta, a míg már semmi további változást nem észlelt. Ezen stádiumban az összes nitrogén vegyületbe ment át. De maradt bizonyos mennyiségű gáz. CAVENDISH az összes felhasznált nitrogén 120-ad részének találta. Ez volt az argon. CAVENDISH tehát előállította az argont a nélkül, hogy tudta volna.

RAYLEIGH és RAMSAY a modern physikának rendelkezésére álló, hatalmasabb eszközeivel ismételték CAVENDISH kísérletét; hét napon keresztül 2400 voltos váltó áramot bocsátottak keresztül a légköri levegőn, mely 6—7 litert tartalmazó légtartóba volt zárva; elektródokul platinalemezek szolgáltak. A légtartóba mindig új és új lemért oxigén mennyiséget vezettek be. Ily módon mintegy 65 cm<sup>3</sup>-nyi gázmaradékot nyertek. Ez volt az új gáz, az argon; hogy azonban elemi test-e vagy más újabb ismeretlen gázok keveréke, azt még külön meg kellett vizsgálni. Azóta ezen a módszeren javítottak, úgy hogy jelenleg 7—8 litert tudnak már óránként produkálni.

Az argon második előállítási módjánál a magnesiumot használják a nitrogén redukáló szeréül. A légköri levegőt először is a szokott módok valamelyikén megfosztják oxigén tartalmától. Az így maradt gázkeveréket oly csövön vezetik keresztül, melyben gázláng



fölött magnesium izzik. A nitrogén a magnesiummal hő és fénytűnemények mellett egyesül. Egyszeri átvezetés azonban nem elég-séges az összes nitrogén redukálására; az eljárást mintegy 14-szer kell ismételni, míg végre a gázkeverék a nitrogéntől egészen megtisztul. Ahhoz, hogy 1 liter argont nyerjünk, mintegy 100 liter lég-köri nitrogén szükséges. Ezt a módszert is azóta többféleképen javították.

Számos kísérletből kiderült, hogy az argonnak a légkörben jelen-lévő mennyisége állandó. 100 térfogatrész levegőben van 21 tér-fogat oxigén, 78·05 nitrogén és 0·94 argon; a súlyviszonyok a kö-vetkezők: 23·2 oxigén, 75·5 nitrogén és 1·30 argon. Az argon egyéb tulajdonságaira vonatkozólag utalunk a Math. és Phys. Lapokban megjelent, már idézett közleményre.

A kérdés már most az volt: elemi test-e az így nyert légköri ar-gon, vagy vannak-e benne más gázok is; szóval tiszta-e az argon? E kérdés eldöntésére két út kínálkozott, az egyik a spektroszkópi vizsgálat, a másik az argon folyósítása és megfagyasztása. Jellemző RAYLEIGH-re és RAMSAY-re, hogy nem bizva eléggé saját munkájuk-ban, az első vizsgálat megejtését CROOKES-ra, a másodikat pedig OLSZEWSKI-ra bízták, a kik ezen a téren a legelső szaktekintélyek. CROOKES az argont spektroszkópjában megvizsgálta s meglepte őt az a rendhagyóság, hogy a körülmények szerint kétféle szinkép mutatkozott: az egyiknek legtöbb vonala a vörös, a másiknak a kék részben volt. A vörös csoport 80, a kék pedig 119 vonalat fog-lalt magában, melyekből csak 26 vonal maradt közös. A kék szin-kép alacsony (0·25 mm.), a vörös pedig magasabb nyomásnál kö-vetkezett be. NEWALL azóta egy harmadik szinképet is kapott, mely-nek az első kettővel 72 közös vonala volt.

Az argon szinképének ez a rendhagyó változása arra mutatott, hogy összetett anyag s így legalább is keverék, miután nem való-szinű, hogy vegyület legyen.

Ugyanezen eredményre jutott OLSZEWSKI, a ki az argont folyósi-totta és megfagyasztotta. Szilárd állapotában szép, tiszta, átlátszó mint a jég; ha azonban hőmérsékletét még tovább súlyeszítjük, átlátszóságát kezdi veszíteni, áttetsző fehérré válik. Ezen változás



vagy új megszilárdulásra, vagy részletes olvadásra mutat, a mit csak úgy tudunk megmagyarázni, ha felteszszük, hogy az eddig előállított argon nem homogén anyag.

Ezen kísérleti tények után nagyon valószínű volt, hogy az argonban épp úgy vannak idegen anyagok, mint a légköri nitrogénben. Ugyanazon gondolati processus, mely a légköri nitrogén tisztátalan voltából az argon fölfedezéséhez vezetett, kényszerítette RAMSAY-t arra is, hogy az argonban ismét új, eddig ismeretlen gázokat keressen. Mindazon adatok, melyeket eladdig az argonról közölt, tulajdonképen nem a tiszta argonra, hanem annak valamivel való keverékére vonatkoznak.

Ma már tudjuk, hogy a légköri nitrogénnel szemben a kémiai nitrogén a tiszta. Ilyent előállítani könnyű volt, mert a nitrogénnek vannak számos vegyületei; de hogyan állítsunk elő tiszta argont, mikor vegyülete nincs? A tiszta argon valóban elérhetetlen ideálnak látszik. Miután ezt előállítani nem tudta, RAMSAY előtt csak az az út állott, hogy az argonnal keveredve előforduló anyagokat elválassza. De hogyan? Ha ilyen anyagok tényleg meg is vannak az argonban, ép oly kémiaiilag indifferenseknek kell őket tartanunk, mint a milyennek az egész gázkeverék bizonyult. Az elválasztást tehát semmiféle kémiai úton sem lehet végrehajtani. Csak a physikai módok maradnak hátra. OLSZEWSKI kísérletei gyanítani engedték, hogy a gázkeverék egyes alkotó részeinek olvadáspontjai, fagypontjai és folyósodási pontjai különbözök. Ha tehát egy bizonyos mennyiségű gázkeveréket folyósítunk, megeshetik, hogy az egyik alkotórész már megfagy, mikor még a többi folyós. A megfagyott részt azután könnyű a többitől elválasztani. Viszont, ha a folyós anyagot párologtatjuk, akkor a könnyebben illanó alkotó részek előbb távoznak majd el s így ezeket is külön lehet felfogni. Ezeket a kísérleteket RAMSAY mind végrehajtotta s ily módon az argonban négy új elemi testet: *kryptont*, *metargont*, *neont* és *xenont* fedezett fel.

*Krypton.* RAMSAY  $750\text{ cm}^3$  folyós levegőt párologtatott; mikor a csőben már csak mintegy  $10\text{ cm}^3$ -nyi folyadék maradt, a műveletet megszakította, új légüres csövet kapcsolt készülékéhez, az



elgőzösítést folytatta s a fejlődő gázt tisztította. Ez a maradékgáz a spektroszkópban az argon ismeretes szinképét csak igen halványan mutatta, ellenben egészen új vonalak léptek fel, melyeket az argon szinképeiben hiába keresnők, tehát valamely új, ismeretlen gáznak voltak tulajdonítandók. Különösen jellemző, két igen fényes sárga vonal s két zöld vonal. Hogy meg legyen állapítható, mely vonalak tartoznak az argonhoz és melyek az új gázhoz, RAMSAY mindkét szinképet egy időben vizsgálta s azokat a vonalakat, melyek az argon szinképében vagy egészen hiányoztak vagy nagyon gyöngék voltak, az új gáznak tulajdonította. Ily módon összeállította a nevezetesebb vonalakat s a megfelelő hullámhosszúságokat meghatározta, melyek a következők:

ibolya . . . 431·7; 448·7; 446·1; 467·1.

kék . . . 473·6; 480·7; 483·0; 483·4; 490·9.

zöld . . . 555·73; 556·63.

sárga . . . 582·9; 586·65.

narancsszin . 601·1.

Valamennyi hullámhosszúság  $\mu$ -ben vagyis milliomod mm.-ben van megadva.

Az új gáz sűrűsége a normális állapotokban 22·49 (hydrogéné 1.). Meghatározta továbbá a hanghullámok terjedési sebességét oly csőben, mely ezen gázzal volt megtöltve. Ebből, a

$$v = \sqrt{\frac{p}{d}} z$$

összefüggés alapján, melyben  $p$  a nyomást,  $d$  a sűrűséget és  $z$  a két fajhő viszonyát jelenti, meghatározta a  $z$ -t, melyet 1·666-al talált egyenlőnek. Ismeretes a DULONG és PETIT-féle törvények alkalmazása az elemi testekre, mely szerint *minden elemi testnek ugyanazon atom melege van*. Ezen törvényre támaszkodva elméleti megfontolásokból kiderült, hogy  $n$  atomból álló gáznál

$$z = 1 + \frac{2}{3n};$$



tehát 1 atomú gáznál

$$z = 1.666;$$

2 atomúnál

$$z = 1.333 \text{ stb.}$$

Miután a krypton kétféle fajhőjének viszonya : 1.666, tehát csak *monatomikus* lehet ép úgy mint a higany és az argon.

*Neon és metargon*, az «argon kísérői». A krypton felfedezése után RAMSAY az argonban meglévő és előresejtett új gázok elválasztására tért át. Assistensével TRAVERS-sel együtt nagy mennyiségű argont állított elő, melyet folyós levegő segítségével folyósított. A folyósodás lassanként való előrehaladásával egyidejűleg egy fehér, szilárd test vált ki. Mikor már mintegy 13—14 liter argongáz folyósodott, a csöveket elzárta; várt kis ideig, míg a folyadék és a felette lebegő gáz között az egyensúly helyre állt. Ezután kiszivattyúzott csövet kapcsolt előbbi készülékéhez, a csapot megnyitotta s a kiáramló gázt felfogta. Így nyert egy első gázrészt, mely azon anyagokat tartalmazta, melyek könnyebbek, mint az argon. Ezután a lecsapódott szilárd test elválasztására tért át. E végből a folyós argont lepárolgattatta, a szilárd test visszamaradt, melyet azután külön, kiszivattyúzott csövekbe gőzösített el. Az argonból így két új gázt választott el, mindegyiket tisztította, próbálta vegyülésre birni, a mi nem ment. Az első gázmaradék a spektroszkópban néhány fényes vörös vonalat, egy fényes sárga vonalat és sok gyöngye kék és zöld vonalat mutatott. A sárga vonalnak megfelelő hullámhosszúság  $584.96 \mu\mu$ ; tehát nem esik össze a natrium, helium vagy krypton hasonló vonalával.

Az új gáz *neon* nevet kapott. Sűrűségét eleinte 14.67-ben állapította meg; de meg volt győződve, hogy ez nem helyes szám; mert még benne argon és helium nyomai maradtak. Miután meggyőződött arról, hogy vegyülni úgy sem fog, az elválasztásnak egészen új módját alkalmazhatta, nevezetesen a gázoknak a folyós oxigénben való különböző fokú oldhatóságát. A «tisztított» neonban már alig maradt helium és argon, ez a két nehezebb gáz s így sűrűsége leszállt 10.04-re. A neon az elemek periodikus rendszerében nagyon jól elhelyezhető, ha ez utóbbi sűrűséget fogadjuk el.



A szilárd testből fejlődött gáz a spektroszkópban igen szövevényes szinképet mutat. Kisfokú dispersio mellett sávós szinképnek látszik, azonban a rács használatánál az egész szinképben egyes fényesebb vonalak jelennek meg, a köztük lévő tért pedig halványabb, de jól határolt vonalak töltik ki. A fényesebb vonalak a következők:

I. zöld sáv	. . .	563·25; 558·30; 553·70.
II. zöld „	. . .	516·30; 512·65.
I. kék „	. . .	473·35; 471·15.
II. „ „	. . .	460·45.
III. „ „	. . .	431·40.
IV. „ „	. . .	421·35.
V. „ „	. . .	387·8.

A gáz sűrűsége 19·87, tehát közel jár az argonéhoz; a fajhők viszonyának meghatározása arra vezetett, hogy egy atómú. Neve *metargon*; úgy látszik, hogy az argonhoz olyan viszonyban áll, mint a nikkel a kobalthoz. Különös jelenség, hogy a szén szinképe a 3 utolsó sáv kivételével megegyezik a metargon szinképével, viszont a 3 utolsó vonal összeesik a cyan vonalaival. RAMSAY, TRAVERS és BAILY azonban hiába erőlködtek, hogy a metargont oxigénnel egyesülésre bírják s így ki van zárva, hogy szénből álljon; a szinkép további vizsgálata is arról győzte meg őket, hogy az teljesen önálló, kifejlődött szinkép.

*Xenon*. A leírt módszer alkalmazása végre a légkör egy további alkotórészének felfedezéséhez vezetett, mely az új gázok legnehezebbike. Tulajdonságai még nincsenek átvizsgálva; szinképének az a különös sajátossága van, hogy a kisütő áramkörbe kapcsolt leydeni palaczkok bizonyos új vonalakat idéznek elő, melyek a szénéhez hasonlóak. Sűrűsége 32·5, mely esetleg 40-re emelkedhetik, a mikor atómsúlya 82 lenne; ez esetben az elemek periodikus rendszerében volna számára hely.

Hogy ezen új elemekkel a légkör alkotórészeinek száma ki van-e merítve, ki tudná azt megmondani? Mindenesetre csodálatos, hogy ezen anyagok az analizáló chemikusok figyelmét oly sokáig kike-



rülhették. De ha tekintetbe vesszük, a most már ismeretes tulajdonságaikat, különösen a teljes kémiai inerttiát, érthetővé válik, miért maradhattak oly sokáig titokban. Megértjük azt is, hogy nem kémiai, hanem csak physikai úton lehetett nyomukra jönni; ha a gázok folyósítása újabb időben nem vált volna lehetővé, valószínű, hogy némelyiküket még ma sem ismernők. Annál bámulatosabb RAYLEIGH fényes következtető képessége, melynek révén felismerésük s előállításuk lehetővé vált. (Néhány nevezetesebb irodalmi közlemény, melyekben az új gázokról szó van: *Nature* 1898. évi f.: *Revue générale de Science* 1898.; *Revue des deux Mondes* 1898. t. 149.; *Naturw. Rundschau* 1898.; *Zeitschr. für phys. u. chem. Unterricht* 1899. jan.)

Mikola Sándor.



## A FÖLD ALAKJÁNAK ÉS NAGYSÁGÁNAK EGY HELY- BŐL ESZKÖZÖLT HOLDMEGFIGYELÉSEK ALAPJÁN VALÓ MEGHATÁROZÁSA.

Az első előadásban, melylyel Társulatunk estélyeinek sorozata megnyílt, báró EÖTVÖS LORÁND legalább körvonalalaiban fölötte érdekes és rendkívül egyszerű physikai módszereken alapuló eljárást ismertetett, mely a Föld alakjának és nagyságának *egy* megfigyelési helyből való meghatározását megengedi. Ha ugyanis a nehézségi erőt valamely ingának lengési terén belül változónak tekintjük — és e változás még messze túlhaladja az alkalmasan szerkesztett műszereinkkel elérhető pontosságot, — akkor a vízszintes és függélyes hosszúlengésű inga mozgási egyenletében a megfigyelési hely két főgörbületi sugarának recziprok értéke lép fel illetve különbség és összeg alakjában, úgy hogy ezen két számadat, tehát maguk a főgörbületi sugarak is a megfigyelés alkalmas berendezése mellett meghatározhatók. Habár a pontosság, melyet a földalak és nagyság *egy* észlelési pontból való megállapításából várhatunk, kétségen kívül messze mögötte marad annak, melyet a direkt fokmérés biztosít, mégis bizonyos, hogy az *egy* pontból alkalmazható mérési módszerek éppen elméletileg nagyon érdekesek, sőt egyes esetekben kívánatos ellenőrzésül is szolgálhatnak.

Ezért tán nem felesleges, ha a röviden említett physikai módszer mellé a csillagászati eljárást is állítjuk, mely különösen azért fontos, mivel az *egy* helyből meghatározandó mennyiség, a Hold æquatorialis horizontális parallaxisa nagy, kedvező körülmények között a horizonttól a zenithig egy teljes foknál nagyobb közön belül változó mennyiség. Ez nagysága és gyors változása folytán



tehát könnyen és biztosan lemérhető. Növeli a módszer érdekességét, hogy lényegében ugyanaz, melylyel már Newton bizonyította a Holdra ható gyorsulás azonosságát a földfelületi gyorsulással s hogy a csillagászatilag meghatározott lapultság a geodéta előtt is kívánatos ellenőrzése a fokmérésekből levezetett, minden egyes esetben csak kevés meridiánellipszis közepes lapultságának megfelelő adatnak.

Mellőzve az Aristotelesig felnyúló kísérleteket, melyekkel részleges holdfogyatkozások alkalmával a Földnek a Holdra vetett árnyékvonalával iparkodtak meghatározni a Föld alakját, MARALDI s vele egyidőben MAUPERTUIS voltak az elsők, kik a Hold parallaxisának gondos lemérését a Föld alakjának megismerésére alkalmasnak találták. Az erre vonatkozó dolgozatuk 1734-ből, a perui-lapplandi fokmérést megelőző évből való. Ugy látszik tehát, hogy MAUPERTUIS, ki e műveletben részt vett, szükségesnek vélte a fokmérés adatait csillagászatilag ellenőrizhetni, vagy pedig már a tényleges mérés előtt rövidesen el akarta döntení a vitát, mely NEWTON és PICARD nézete között felmerült. Szerinte ugyanis: «done on peut reconnaître par les parallaxes horizontales de la Lune observées en différens lieux, si la Terre est une sphère ou un sphéroïde, et si ce sphéroïde est allongé ou applati».

Hasonló, a Hold parallaxisára vonatkozó számításokat eszközölt MAYER TÓBIÁS, EULER, KÄSTNER és bizonyára mások is. A legújabb időben is javasolta BISCHOFF, hogy a Föld geoidos eltérései a holdazimuthok megfigyeléseiből vezettessenek le. FÖRSTER helyeselte ugyan a nemzetközi fokmérés nizzai jegyzőkönyvében az eljárást, de gyakorlati nehézségeire is rámutatott.

Mindezen módszerek modern foglalatban röviden a következőkben ismertethetők.

Geographiai szélességen értjük a megfigyelési hely függélyességének (nehézségi erő irányának) hajlását az æquatorhoz ; a geocentrumos szélesség ellenben a földfelületi ponthoz húzott radius-vector szöglete az æquatorral. Ha emezt  $\phi$ -vel, amazt  $\varphi$ -vel jelöljük, a Földet pedig kéttengelyű ellipsoiddal azonosítjuk, mely  $e$



numerikus excentrumossággal és  $a$  fél nagy (æquatori) tengelylyel bir, akkor tudvalevőleg

$$\operatorname{tang} \phi = (1 - e^2) \operatorname{tang} \varphi,$$

vagy igen gyorsan convergáló sor alakjában :

$$\begin{aligned} \phi = \varphi - \frac{1}{1} \left( \frac{e^2}{2 - e^2} \right) \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{2 - e^2} \right)^2 \sin 4\varphi - \\ - \frac{1}{3} \left( \frac{e^2}{2 - e^2} \right)^3 \sin 6\varphi + \dots \end{aligned}$$

Az első egyenlet közvetlenül adódik, ha a meridián ellipsis egyenletéből keressük a normálisnak szögletét az abscissatengelylyel és ennek összefüggését a poláris szöglettel.  $\varphi - \phi$  természetesen ama szöglet, melyet az esés iránya a földsugárral képez, s mely a mi szélességeink alatt a több, mint  $11'30''$ -re rugó maximumot éri el. Maga a földsugár értéke  $\varphi$  geographiai szélesség alatt

$$\rho = a \sqrt{\frac{\cos \varphi}{\cos \phi \cos (\varphi - \phi)}}$$

nagyságúnak adódik.

Fektessünk most a megfigyelési helyen át derékszögű coordinátarendszert, melynek  $z$  tengelye a zenith felé néz,  $x$  tengelye a dél-,  $y$  tengelye a nyugatpont felé irányított. Ha a Hold középpontjának magassága és azimutja  $h'$  és  $\omega'$ , a megfigyelési helytől való távolsága pedig  $\Delta'$ , akkor

$$x' = \Delta' \cos h' \cos \omega'; \quad y' = \Delta' \cos h' \sin \omega'; \quad z' = \Delta' \sin h'.$$

A Föld középpontján átmenő, az előbbi rendszerrel párhuzamos rendszerre vonatkozólag, melyben  $\Delta$ ,  $h$ ,  $\omega$  a geocentrumos távolságot, magasságot és azimuthot jelöli, hasonlóképpen

$$x = \Delta \cos h \cos \omega; \quad y = \Delta \cos h \sin \omega; \quad z = \Delta \sin h.$$

Mivel a Föld középpontja az első rendszerben  $-\rho \sin(\varphi - \phi)$ ; 0; és  $-\rho \cos(\varphi - \phi)$  koordinátákkal bir, áll a következő transzformációs rendszer :



$$\Delta' \cos h' \cos \omega' = \Delta \cos h \cos \omega - \rho \sin (\varphi - \psi)$$

$$\Delta' \cos h' \sin \omega' = \Delta \cos h \sin \omega$$

$$\Delta' \sin h' = \Delta \sin h - \rho \cos (\varphi - \psi),$$

melyből  $\Delta$  eliminációja után a feladatunkat megoldó egyenlet-rendszerhez jutunk.

$$\frac{a}{\Delta} = \sin \pi$$

ugyanis a Hold æquatoriális horizontális parallaxisa;  $\omega'$  és  $h'$  a megfigyelés által ismeretes,  $h$  és  $\omega$  ellenben a Hold táblázatjai által a megfigyelés idejére kiszámítható. Meg van tehát minden adat, a mely az excentrumosság kiszámítására szükséges, és ha még a magassági parallaxist magát is meghatároztuk, megállapítható maga  $a$ , az æquator sugara is. Excentrumosság és lapultság egymással pedig a következő, jól ismert

$$a = 1 - \sqrt{1 - e^2}$$

egyenlet által kapcsolatosak.

A nélkül, hogy a gyors convergentia által ajánlatos sorbontás közelebbi egyenleteit adnám, álljanak itt a kész eredmények, mint ezeket a csillagászatban alkalmazzák.

Legyen

$$\tan \gamma = \frac{\cos \frac{1}{2} (\omega' + \omega)}{\cos \frac{1}{2} (\omega' - \omega)} \tan (\varphi - \psi)$$

$$\rho \frac{\sin \pi}{\cos h} \sin (\varphi - \psi) = m, \quad \rho \frac{\sin \pi}{\cos \gamma} \cos (\varphi - \psi) = n,$$

akkor egyszerűen:

$$\omega' - \omega = m \sin \omega + \frac{1}{2} m^2 \sin 2\omega + \frac{1}{3} m^3 \sin 3\omega + \dots$$

$$h' - h = -n \cos (h + \gamma) - \frac{1}{2} n^2 \sin 2(h + \gamma) + \frac{1}{3} n^3 \cos 3(h + \gamma) + \dots$$

Ha  $\omega' - \omega$  és  $h' - h$  a megfigyelt és a táblából a megfigyelési időre érvényes érték összehasonlításából ismeretes, az  $m$ ,  $n$  és  $\gamma$ -ban rejlő excentrumosság meghatározható, legegyszerűbben mindenestre azáltal, hogy a fenti kifejezéseket az excentrumosság hatványai szerint haladó sorba bontjuk.



E tisztán geometriai módszerektől eltekintve, mechanikai methodusokkal is rendelkezünk. Ismertetésünknel legegyszerűbben járunk el, ha első sorban a Föld æquatori sugarát, azután lapultságát határozzuk meg.

A Hold mozgását első közelítésben egyenletes körmozgásnak tekinthetjük, a mire különben a «közepes távolság», a «közép napi mozgás» s hasonló kifejezések már maguktól is utalnak. Ha a Hold közepes pályasugara  $R$ , a siderikus hó tartama másodpercekben kifejezve  $T$ , akkor a Holdra ható gyorsulás:

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{T^2} R,$$

vagy a Föld æquatori sugarát és a Hold æquatoriális horizontális parallaxisát behozva:

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{a}{\sin \pi}.$$

Ezen gyorsulás természetesen a Hold és Földből álló rendszernek egymás felé való esésének felel meg. Tisztán a Holdnak esését a Föld felé megkapjuk, ha az  $\frac{M}{M+m}$  factorral szorozunk, hol  $M$  a Föld,  $m$  pedig a Hold tömegét jelenti.

A Föld mellékbolygóival együtt azonban nem képez izolált rendszert, hanem állandóan a bolygók, különösen pedig a Nap hatásának van kitéve. Ha a Nap  $N$ , Föld  $F$  és Hold  $H$  középpontjai között háromszöget szerkesztünk, könnyű látni, hogy a Nap a Hold minden állásában nagyobbítani iparkodik a Hold távolságát a Földtől, vagy más szóval, a Nap állandóan kisebbiti a Holdra gyakorolt gyorsulást. Ha tehát a Nap befolyásától meg akarjuk szabadítani a Hold gyorsulását, a Nap állandó közepes hatását hozzá kell adnunk.

Legyen  $NF=A$  a Nap közepes távolsága a Földtől,  $R=HF$  a Holdpálya középsugara és  $NH=D$  a Holdnak változó távolsága a Naptól. A Földnél lévő szögletet  $\omega$ -val, a Napnál lévő  $\chi$ -vel jelölve, áll:

$$\text{a Nap okozta relativ gyorsulás a Holdra} = \frac{k^2}{D^2} \cos \chi - \frac{\chi^2}{A^2},$$



ha a Hold tömegét a Napé mellett elhanyagoljuk és a Hold pályáját az ekliptikával összeesőnek tekintjük. Áll továbbá ugyan-ezen háromszögben

$$D^2 = A^2 + R^2 - 2AR \cos \omega \quad \text{és} \quad \cos \chi = \frac{A - R \cos \omega}{2D}.$$

Ha ezen értékek felhasználásával a Nap gyorsulásának közepes értékét keressük, mely természetesen  $\omega$ -tól független, és ezt a Föld okozta  $\frac{x^2}{R^2}$  gyorsulással összehasonlítjuk, lesz a Nap és Föld közepes gyorsulásainak viszonya számára:

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{R^3}{A^3} = \frac{1}{2} \left( \frac{n'}{n} \right)^2$$

hol  $n' = 59'8''.19$  és  $n = 13^\circ 10'35''.0$  a Nap és Hold közepes napi mozgásai. E szerint  $1 + \nu = 1,002\,7976$  és a Hold tiszta gyorsulása a Föld vonzása folytán

$$\gamma = (1 + \nu) \frac{M}{M + m} \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{a}{\sin \pi}.$$

Másrészt ugyanezen gyorsulás a NEWTON-féle törvény értelmében is könnyen kifejezhető. Ha ugyanis  $G$  a Föld tömegvonzási gyorsulása a Föld felszínén, azaz a centrifugális erő gyorsulásától megszabadított nehézségi gyorsulás, akkor ennek értéke a Hold távolságában

$$\frac{\gamma}{G} = \frac{a^2}{R^2} = \sin^2 \pi$$

és a  $\gamma$  számára talált két egyenlet egyesítése ad:

$$G \sin^3 \pi = (1 + \nu) \frac{M}{M + m} \frac{4\pi^2}{T^2} a,$$

a miből  $a$  meghatározható, ha a többi mennyiség ismeretes.

A Hold siderikus keringési ideje  $T = 27^d 7^h 43^m 11^s.5 = 2360\,591^s.5$  egy helyből is meghatározható, ha a Holdnak ugyanazon álló csillaghoz való visszatérését figyeljük. Most ez adat ősrégi csillagászati megfigyelések alapján természetesen már tel-



jes pontossággal ismeretes. A két tömeg viszonya  $\frac{m}{M} = 0,012\,5522$  az árapály jelenségekből vezethető le.  $G$  a Föld tömegvonzási gyorsulása az ingával lemerített nehézségi gyorsulásból kiszámítható, ha a Föld tengelyforgásából keletkezett centrífugális gyorsulást tekintetbe vesszük. Ennek értéke az æquatoron,  $t$ -vel jelezve a nap tartamát másodperczekben kifejezve

$$\frac{4\pi^2}{t^2} a = 0,033\,9117 \frac{\text{met}}{\text{sec}^2}$$

s kicsinysége folytán eléggé pontosan kiszámítható, ha az æquatori sugárnak csak közelítő értékét is ismerjük. A megmért nehézségi gyorsulás különben a CLAIRAUT-féle egyenlet által bármely szélességre átszámítható, mivel LISTING vagy ALBRECHT kiterjedt számításai nyomán

$$g = 9,780\,728 + 0,050\,875 \sin^2 \varphi,$$

illetve  $g = 9,781\,116 + 0,050\,459 \sin^2 \varphi$  meter.

A LISTING-féle adatból az æquatori tömegvonzási gyorsulás mint  $g_0$  és  $\frac{4\pi^2}{t^2} a$  összege  $9,814\,640 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  leend.

A Hold æquatoriális horizontális parallaxisának meghatározása szigorúan természetesen két helyből való megfigyelést igényel. Tudva van pl., hogy éppen ezen fontos adat meghatározása kedvéért emelte az angol kormány a fok földi csillagvizsgálót. Tekintve azonban ezen parallaxis nagy értékét, egyetlenegy helyből is vezethető le. A módszer alkalmazhatóságát MAYER TÓBIÁS tényleges megfigyeléssel igazolta is s ez egyszersmind például szolgálhat az előbb tárgyalt módszer számára is. MAYER megfigyelései különben tudtommal az egyetlenek, melyek a Hold parallaxisának meghatározását egy megfigyelési pontból czélozták; innen, hogy éppen ezen régi megfigyeléseket idézem.

MAYER összehasonlította ugyanis 1748 augusztus 15-én Nürnbergben a Holdat és Alkyonét, és megállapította ennek alapján látszó rectascensióját  $a'$ -t. Az alábbi táblázat adja egyrészt ezen



megfigyeléseket, részben a Hold geocentrumos közelített declinációját és az óraszöget a megfigyelés pillanatában.

Megfigyelés	Látszó rectasc = $\alpha'$	geocentr. decl = $\delta$	óraszög = $\theta - \alpha$
1	50° 39' 48''	+23° 28'	85° 6'
2	50 46 49	23 39	81 53
3	50 55 6	23 41	78 4
4	51 1 45	23 43	74 58
5	52 18 39	24 2	33 57.

Az egyes megfigyelések különbségei, valamint a rectascensiók különbségei a megfigyelési idők számára a következő táblázatban foglaltatnak.

Megfigyelés	$\alpha' - \alpha'_5$	$\alpha - \alpha_5$	$(\alpha - \alpha_5) - (\alpha' - \alpha'_5)$
1) — 5)	1° 38' 51''	1° 56' 6''	17' 15''
2) — 5)	1 31 50	1 48 48	16 58
3) — 5)	1 23 33	1 40 8	16 35
4) — 5)	1 16 54	1 33 4	16 10

és az utolsó rovat természetesen a parallaxis hatását adja a rectascensióra.

Ha  $\varphi = 49^\circ 27' 10''$ , akkor  $\sin \pi$  coefficientensei sorban lesznek:

$$0.7088, 0.7044, 0.6964, 0.6876, 0.3985$$

s ha ezek különbségeivel osztjuk sorban az  $(\alpha - \alpha_5) - (\alpha' - \alpha'_5)$  számadatokat, nyerjük a következő négy parallaxis értéket:

$$\pi = 55'38'', 55'30'', 55'34'', 55'55''.$$

Ha a Hold távolsága a megfigyelés pillanatában  $R$  volt, míg  $R_0$  a közepes távolságot jelenti, akkor ezen számokat, vagy helyesebben sinusait csak  $\frac{R}{R_0}$ -val kell megszorozni, hogy a közepes parallaxist nyerjük. Ennek tényleges értéke  $\Pi = 57'2''3$ .

Mindezen értékekkel  $a = 6\,388\,216\,m$ , a mi a CLARKE-féle értéktől ( $a = 6\,378\,207$ ) nem túlságosan különbözik.

Kétségek kívül jobb megegyezést kaptunk volna még, ha a gyors-



sulás számára azon értéket helyettesítjük, mely a sphæroidikus Földnek felel meg azon geographiai szélesség alatt, a melyben a sphæroid vonzása a homogén gömbével azonos.

Ha a lapultság befolyását akarjuk tanulmányozni a Hold mozgására, a Föld potenciáljával kell foglalkoznunk. Ez melleleg a két CLAIRAUT-féle egyenlethez is vezet, melyek ingamérések alapján is lehetségessé teszik a Föld alakjának és nagyságának meghatározását.

Legyen  $dm$  a Föld egy tömegeleme, mely  $x', y', z'$  coordinátákkal bír, míg valamely a Földön kívül fekvő  $P$  pont coordinátái  $x, y, z$ , s benne a tömegegységet gondoljuk. A derékszögű coordináták kezdete valahol a Föld belsejében fekszik, kezdőpont és tengelyek iránya egyelőre még határozatlan. A föld potentialja ekkor

$$V = \int dm [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-\frac{1}{2}},$$

hol az integráció a Föld egész tömegére kiterjesztendő. A Hold tetemes távolsága miatt az  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$  távolság  $r' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}$ -hez képest igen nagy, úgy hogy  $\frac{r'}{r}$  hatványai szerint sorba bonthatunk. Az eredmény, tekintettel arra, hogy  $x, y, z, r$  az integráció alkalmával mint állandók szerepelnek, s hogy  $\int dm = M$  a Föld tömege, a következő:

$$V = \int \frac{M}{r} + \frac{f}{r^3} \int dm (xx' + yy' + zz') + \\ + \frac{f}{2r^5} \int dm \frac{3(xx' + yy' + zz')^2 - r^2 r'^2}{2} + \dots$$

Ha most a coordinátarendszer kezdőpontját a Föld tömegközéppontjába fektetjük, akkor

$$\int x' dm = \int y' dm = \int z' dm = 0$$

s a jobb oldal második tagja egészen kiesik. Ha továbbá a tengelyeket is a főtehetlenségi tengelyekbe irányítjuk, s a főtehetlenségi momentumokat



$$MA = \int dm (y'^2 + z'^2), \quad MB = \int dm (x'^2 + z'^2),$$

$$MC = \int dm (x'^2 + y'^2).$$

val jelöljük, akkor a jobboldal harmadik tagja is tetemesen egyszerűsödik, a mennyiben

$$\int dm x' y' = \int dm x' z' = \int dm y' z' = 0$$

lévén, marad:

$$V = f \frac{M}{r} + \frac{fM}{2r^5} [(B+C-2A)x^2 + (C+A-2B)y^2 + \\ + (A+B-2C)z^2] + \dots$$

vagy

$$C = \frac{1}{2}(A+B) + K$$

behozatala után, egyszerűbben

$$V = f \frac{M}{r} + \frac{fM}{2r^5} [\frac{3}{2}(A-B)(y^2 - x^2) + K(x^2 + y^2 - 2z^2)] + \dots$$

•Ha  $\varphi$  és  $\lambda$  a geocentrumos szélességet és hosszúságot jelenti, akkor

$$x = r \cos \varphi \cos \lambda, \quad y = r \cos \varphi \sin \lambda, \quad z = r \sin \varphi$$

és

$$V = f \frac{M}{r} + \frac{fM}{2r^3} [\frac{3}{2}(A-B) \cos^2 \varphi \cos 2\lambda + K(1 - 3 \sin^2 \varphi)] + \dots$$

A nehézségi potenciált egyszerűen megkapjuk, ha ezen kifejezéshez a centrifugális potenciált,  $\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi$ -t adjuk, melyben  $\omega$  a Föld tengelyforgásának szögsebessége.

A nehézségi gyorsulás egyszerűen

$$g = -\frac{\partial V}{\partial r} - \omega^2 r \cos^2 \varphi,$$

és a megfigyelések szerint a LISTING és ALBRECHT által választott formába hozható. Mivel ezekben a geográfiai hosszúság nem szerepel, nyilvánvaló, hogy az ingamérések pontosságán belül  $A=B$ , azaz a két æquatori főtételatlenségi momentum egymással egyenlő.



Vegyük most elő azon nehézségi niveaufelületet, mely számára  $V=V_0$  s írjuk fel egyenletét az æquator ( $\varphi=0$ ,  $r=a$ ) és a pólus számára ( $\varphi=90^\circ$ ,  $r=b$ ). Ha még behozzuk a lapultságot, tehát írunk:

$$b=a(1-a),$$

akkor

$$V_0 = \frac{fM}{a} + \frac{fMK}{2a^3} + \frac{1}{2}\omega^2 a^2$$

és

$$V_0 = \frac{fM}{a}(1-a)^{-1} - \frac{fMK}{a^3}(1-a)^{-3}$$

és a két egyenlet különbsége, ha  $a$  hatványai szerint sorba bontunk s az első hatványnál megállapodunk:

$$\frac{1}{2}\omega^2 a = \frac{fM}{a^2}a - \frac{3fMK}{2a^4}(1+2a).$$

Hasonlóan nyerünk az æquatori és poláris gyorsulás számára:

$$g_0 + \omega^2 a = \frac{fM}{a^2} + \frac{3fMK}{2a^4}$$

$$g_{90} = \frac{fM}{a^2}(1+2a) - \frac{3fMK}{2a^4}2(1+4a).$$

Ha az első egyenletet  $3+a$ , a másodikat  $1-a$  és az utolsót  $-1$ -gyel megszorozzuk és összeadjuk,  $a$  második hatványát s a vele egyenlő rendű szorzatot lapultságból és centrifugális erőből elhanyagoljuk, nyerjük:

$$\frac{\frac{1}{2}\omega^2 a}{g_0} = a + \frac{g_{90} - g_0}{g_0},$$

mely egyenlet a CLAIRAUT-féle második egyenlet nevét viseli. A  $g=a+b\sin^2\varphi$  első CLAIRAUT-féle egyenlettel együtt két helyen megmért ingagyorsulásból szolgáltatja a Föld lapultságát, még pedig ugyanazon pontossággal, mint a geodéziai mérések. Ez egyszersmind utólagos bizonyíték a mellett, hogy a potenciál sorbontásánál a közölt kezdő tagokon kívül magasabbrendű tagok tekinteten kívül maradhatnak, még akkor is, ha a  $P$  pont



a Föld felületén fekszik. A kifejezés egyszersmind azt is mutatja, hogy azon szélességben, melyben  $\sin^2 \varphi = \frac{1}{3}$ , a földsphæroid ugyanazon vonzást gyakorolja, mintha homogén gömb volna.

Ha az egyenletekből az  $fMK$  szorzatot elimináljuk, akkor találjuk a Föld nehézségi potenciálja számára a következő, a lapultság második hatványáig helyes kifejezést

$$V = f \frac{M}{r} + \frac{a^4 g_0}{3r^3} \left( a - \frac{1}{2} \frac{\omega^2 a}{g_0} \right) (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi.$$

Ha ezen kifejezésből levezetjük a gyorsulás egyenletét, akkor annak adott geographiai szélesség alatt lemért értékéből csakugyan kiszámítható a Föld illető radiusvectora.

Most már könnyű belátni, hogy a Hold mozgási egyenleteiben nem a gömböt jellemző  $f \frac{M}{r}$  potenciál szerepel, hanem ennek

$$f \frac{MK}{2r^3} (1 - 3 \sin^2 \varphi)$$

kiegészítője is.  $\varphi$  itt is a vonzott pont távolsága az æquatortól, tehát a Hold declinációja.

Ha a Nap behatásától teljesen eltekintünk, a Hold relativ mozgása a Föld körül már nem

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + x^2 \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \frac{x}{r^3} &= 0; & \frac{d^2 y}{dt^2} + y^2 \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \frac{y}{r^3} &= 0; \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + z^2 \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \frac{z}{r^3} &= 0 \end{aligned}$$

egyenletek által adott, hanem a teljesebb

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x^2 \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \frac{x}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{z^2}{2r^3} \left( 1 + \frac{m}{M} \right) (1 - 3 \sin^2 \varphi) \right]$$

egyenlet által, melyhez még két hasonló járul a többi coordináta számára. Ebben természetesen  $\sin^2 \varphi = \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$  teendő.

Az integrál az egyszerű KEPLER-féle elliptikus mozgást jellemzné, ha a jobb oldal 0 volna. A Hold coordinátái  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ ,



ekkor az ismert időfüggvények, és  $x-x_0=\xi$ ,  $y-y_0=\eta$ ,  $z-z_0=\zeta$  mint a Föld gömbi eltéréséből származó háborgások tekinthetők. A perturbációk a jobboldal kicsinysége folytán nem nagyok, és nehézség nélkül, bár kissé körülményesen levezethetők, különösen ha poláris koordinátákat vezetünk be.

Ha  $\lambda$  a Hold,  $\varrho$  pedig felszálló csomójának valódi hosszúsága, akkor az integráció a Hold szélességében és hosszúságában illetve a

$$(g_0\alpha - \frac{1}{2}\omega^2\alpha) \sin \lambda \quad \text{és} \quad (g_0\alpha - \frac{1}{2}\omega^2\alpha) \sin \varrho$$

tagokat szolgáltatja. Mivel a coefficientsek értékei a megfigyelésből adottak, úgy viszont ezekből,  $g_0$  és  $\omega$ -ból a lapultság is meghatározható.

LAPLACE ily úton a szélesség és hosszúságbeli háborgásból eleinte  $\alpha = \frac{1}{304,6}$  és  $\frac{1}{305}$ -öt talált. Később, BÜRG és BOUVARD behatóbb számításai alapján  $\alpha = \frac{1}{299,1}$ . HELMERT pedig HANSEN pontos elmélete alapján  $\alpha = \frac{1}{297,8 \pm 2}$  értéket vezet le. Ezzel szemben a fokmérések BESSEL szerint  $\alpha = \frac{1}{299,15}$  és CLARKE szerint  $\frac{1}{294,98}$ -ot adnak. A csillagászatilag talált értékek ugyan valamivel kisebbek, de mindenesetre tanúbizonyságot tesznek a mellett, hogy az összes meridiánok lapultsága közel ugyanaz, melyet a fokmérés néhány kiválasztott meridián-ellipszis számára kimutatott.

Teljességgel igazolva van tehát LAPLACE ama mondása, hogy a csillagász meghatározhatja a Föld nagyságát és alakját, a nélkül, hogy a táveső mellett elfoglalt helyét elhagyni kénytelen volna.

*Kövesligethy Radó.*



## PHYSIKAI LABORATORIUM.

**A leydeni palaczk elektromossága.** Állítsunk egy erősen megtöltött leydeni palaczkot jól szigetelő (ebonit) talapzatra és helyezzünk gombjára elektromos szárnyas kereket (Franklin-kereket), úgy az mindaddig élénk forgásban lesz, míg a belső fegyverzetnek szabad elektromossága ki nem áramlik. Ha most a külső fegyverzethez ujjunkkal érünk, vagy azt a föld-del vezetőleg kötjük össze, akkor a kerék újból forogni kezd, s e forgás mindaddig tart, a míg csak az üveg töltése ki nem fogy. H. PFLAUM ez egyszerű kísérletével mutatja ki, hogy a leydeni palaczkok szabad elektromossága mindenkor váltokozva lép fel, és pedig egyszer a külső, másszor a belső fegyverzeten. E kísérlet még arra is szolgálhat, hogy vele a potenciális energia átalakulását tényleg megmutassuk. Elsötétített szobában, jó erős töltés mellett, szép fénytűnemény keletkezik. A szárnyas kerék forgó fénynyalábót sugároz ki. PFLAUM e célra 45 cm magas fegyverzetű palaczkot használ. A kerék kényelmesebb kezelésére czélszerű csúccsal ellátott fémkalapot készíteni, a mely félgömb, ha az átmérőnél kissé összeszorított, a palaczk gombjára szilárdan ráilleszthető. (Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht. 1897. 148 l.)

**Bunsen-lámpára való állvány.** Czélszerű állványt készített STEIGER, st.-galleni tanár, a Bunsen-lámpára, melyet könnyű kezelhetősége és olcsósága miatt főleg iskolai laboratoriumokban alkalmazhatunk hasznosan. STEIGER a Bunsen-lámpának három ágát, melyen különben a kémény nyugszik, kissé szélesebbre készíti; végeit derékszögűleg felfelé görbíti és igazító-csávarral látja el. Erre állítható fel az eszköz másik része: egy alul-felül nyitott henger vékony vaslemezről. A henger felületének felső részén több nyílás van azért, hogy az égésnél kiszabaduló gázok a szabadba elillanhassanak akkor, ha a hengert valamely főzőedénnyel elzárjuk. Ez utóbbiak fölmelegítésére a rendes drótszítát, vagy a drótháromszöget vagy az asbestlapot használhatjuk.

A készülék előnye, hogy kis helyet foglal el és könnyen megkészíthető. Egyébként szabadalmazott és C. Desaga czégnél (Heidelberg) rendelhető meg.

Sz. K.



## KITÜZÖTT FELADATOK.

33. Legyen

$$S_n = \sum (-1)^{x_1+x_2+\dots+x_m} \frac{(x_1+x_2+\dots+x_m-1)!}{x_1! x_2! \dots x_m!},$$

a hol az összegezés az

$$x_1+2x_2+\dots+mx_m=n$$

diophantusi egyenlet minden nem negatív számokból álló megoldására kiterjesztendő. Bizonyíttassék be, hogy  $S_n = -\frac{1}{n}$ , ha  $n$   $m$ -mel nem osztható és  $S_n = \frac{m}{n}$ , ha  $n$  osztható  $m$ -mel. (RADOS.)

★

34. Bebizonyítandó, hogy

$$D_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 & b_2 & b_3 & b_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & d_1 & d_2 & d_3 \\ c_3 & c_1 & c_2 & d_3 & d_1 & d_2 \\ c_2 & c_3 & c_1 & d_2 & d_3 & d_1 \end{vmatrix}$$

az

$$R_i = \begin{vmatrix} a_1 + a_i a_2 + a_i^2 a_3 & b_1 + a_i b_2 + a_i^2 b_3 \\ c_1 + a_i c_2 + a_i^2 c_3 & d_1 + a_i d_2 + a_i^2 d_3 \end{vmatrix} \\ (i=0, 1, 2)$$

determinánsok szorzatával egyenlő, hol  $a_0=1$  és  $a_1, a_2$  az egység komplex harmadik gyökei.

Továbbá

$$D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ a_3 & a_1 & a_2 & b_3 & b_1 & b_2 & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ a_2 & a_3 & a_1 & b_2 & b_3 & b_1 & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ c_1 & c_2 & c_3 & d_1 & d_2 & d_3 & y_1 & y_2 & \dots & y_k \\ c_3 & c_1 & c_2 & d_3 & d_1 & d_2 & y_1 & y_2 & \dots & y_k \\ c_2 & c_3 & c_1 & d_2 & d_3 & d_1 & y_1 & y_2 & \dots & y_k \\ u_{11} & u_{12} & u_{13} & v_{11} & v_{12} & v_{13} & w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1k} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & v_{21} & v_{22} & v_{23} & w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ u_{k1} & u_{k2} & u_{k3} & v_{k1} & v_{k2} & v_{k3} & w_{k1} & w_{k2} & \dots & w_{kk} \end{vmatrix}$$



az  $R_1$ ,  $R_2$  és

$$S_k = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & b_1 + b_2 + b_3 & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ c_1 + c_2 + c_3 & d_1 + d_2 + d_3 & y_1 & y_2 & \dots & y_k \\ u_{11} + u_{12} + u_{13} & v_{11} + v_{12} + v_{13} & w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1k} \\ u_{21} + u_{22} + u_{23} & v_{21} + v_{22} + v_{23} & w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{k1} + u_{k2} + u_{k3} & v_{k1} + v_{k2} + v_{k3} & w_{k1} & w_{k2} & \dots & w_{kk} \end{vmatrix}$$

szorzatával egyenlő.

(KÜRSCHÁK.)

★

35. *Bebizonyítandó, hogy a síknak bármely önönmagára való kollineár leképezése mint két pollárrecziprocitásnak összetétele állitható elő. Továbbá kifejtendő, hogy egy kollineációnak miként nyerhetők összes ilyen előállításai.*

(KÜRSCHÁK.)

★

36. *Adva van a következő két determináns:*

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \leq 0; \quad b = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \leq 0.$$

*Bizonyítsák be, hogy a következő két determináns közt:*

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11} & a_{12}b_{13} - a_{13}b_{12} & a_{13}b_{11} - a_{11}b_{13} \\ a_{21}b_{22} - a_{22}b_{21} & a_{22}b_{23} - a_{23}b_{22} & a_{23}b_{21} - a_{21}b_{23} \\ a_{31}b_{32} - a_{32}b_{31} & a_{32}b_{33} - a_{33}b_{32} & a_{33}b_{31} - a_{31}b_{33} \end{vmatrix}$$

és

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11}B_{12} - A_{12}B_{11} & A_{12}B_{13} - A_{13}B_{12} & A_{13}B_{11} - A_{11}B_{13} \\ A_{21}B_{22} - A_{22}B_{21} & A_{22}B_{23} - A_{23}B_{22} & A_{23}B_{21} - A_{21}B_{23} \\ A_{31}B_{32} - A_{32}B_{31} & A_{32}B_{33} - A_{33}B_{32} & A_{33}B_{31} - A_{31}B_{33} \end{vmatrix}$$

hol  $A_{ik}$  és  $B_{ik}$  az  $a$  és  $b$  determinánsoknak  $a_{ik}$  és  $b_{ik}$  elemeihez tartozó al-determinánsait jelentik, a következő összefüggés áll fenn:

$$\Delta = a \cdot b \cdot \delta.$$

(ARANY DÁNIEL.)



## KÉT MAXIMUM-MINIMUM PROBLÉMA ELEMI TÁRGYALÁSA.

I. Tétel. *A kocka felszíne kisebb, mint bármely más vele egyenlő köbtartalmú derékszögű paralelepipedoné.*

Legyen az adott köbtartalom  $k$ , akkor a derékszögű paralelepipedon három egy csúcsba összefutó éle  $\frac{\sqrt[3]{k}}{a}$ ,  $\frac{\sqrt[3]{k}}{b}$  és  $ab\sqrt[3]{k}$ , minthogy szorzatuk  $k$ . Felszínének mérőszáma tehát

$$2\sqrt[3]{k^2} \left( a + b + \frac{1}{ab} \right);$$

erről bebizonyítandó, hogy akkor legkisebb, a mikor  $a=b=1$ , s hogy minden más esetben ennél nagyobb, s hogy így

$$a + b + \frac{1}{ab} \leq 3 \quad (I)$$

pozitív  $a$ -nál és  $b$ -nél nem lehetséges, ha felvesszük, hogy

$$\begin{aligned} a &\geq 1, \\ b &\geq 1. \end{aligned}$$

Először is megjegyzendő, hogy

$$ab + \frac{1}{ab} \geq 2;$$

mert ha

$$ab + \frac{1}{ab} < 2,$$

akkor

$$(ab-1)^2 < 0$$



ez pedig abszurdum, de  $ab + \frac{1}{ab} = 2$  is csak akkor lehetséges, a mikor  $ab=1$ ; de  $ab \leq 1$ , mert abból, hogy  $ab=1$ ,

$$a = \frac{1}{b},$$

s ezt (I)-be helyettesítve

$$a + \frac{1}{a} \leq 2$$

következnék, s ez abszurdum;

$$a + \frac{1}{a} < 2$$

ugyanis nem lehet, minthogy ebből

$$(a-1)^2 < 0$$

következnék, és

$$a + \frac{1}{a} = 2$$

sem lehet, minthogy felvettük, hogy  $a \leq 1$ , így tehát

$$2 < ab + \frac{1}{ab};$$

ehhez hozzáadva (I)-et lesz:

$$ab+1 > a+b,$$

a miből

$$b(a-1) > a-1.$$

Ez mutatja, hogy ha  $a-1$  pozitív, t. i.  $a > 1$ , akkor  $b > 1$ ; ha pedig negatív, t. i.  $a < 1$ , akkor  $b < 1$ .

Tehát e két esetben bizonyítandó még be, hogy (I) lehetetlen.

1. eset.

$$\begin{aligned} a &> 1, & a &= k+1, \\ b &> 1, & b &= l+1, \end{aligned}$$

hol  $k$  és  $l$  pozitív számok.

Ekkor

$$2+k+l+\frac{1}{(1+k)(1+l)} \leq 3$$



volna, a miből

$$k^2l + k^2 + kl^2 + kl + l^2 \leq 0,$$

a mi pedig pozitív  $k$ -nál és  $l$ -nél abszurdum.

2. eset.

$$a < 1,$$

$$b < 1.$$

Ekkor

$$\frac{1}{a} > b$$

s minthogy  $\frac{1}{b} - 1$  pozitív, ezzel szorozva, lesz

$$\frac{1}{ab} - \frac{1}{a} > 1 - b,$$

s az előbbieket alapján:

$$a + \frac{1}{a} > 2;$$

e kettőt összeadva

$$\frac{1}{ab} + a > 3 - b$$

s így

$$a + b + \frac{1}{ab} > 3.$$

Ha tehát  $a \geq 1$  és  $b \geq 1$ , akkor (I) lehetetlen, de ha csak egyik, pld.  $a=1$ , akkor ezt (I)-be helyettesítve lesz:

$$b + \frac{1}{b} \leq 2,$$

mi csak akkor lehetséges, ha  $b$  is egyenlő 1-gyel.

Tehát  $a + b + \frac{1}{ab}$  sohasem kisebb mint 3, s csak akkor egyenlő 3-mal, ha  $a=b=1$ .

S így végre  $a + b + \frac{1}{ab}$  és vele együtt a felszín mérőszáma is akkor a legkisebb, midőn a paralelepipedon mind a három éle  $\sqrt[3]{k}$ , azaz mikor a paralelepipedon kocka; s minden más esetben ennél nagyobb.

★



II. Tétel. *A kocka köbtartalma nagyobb, mint bármely más vele egyenlő felszínű paralelepipedoné.*

Legyen a köbtartalom  $k$ , akkor ismét a három egy csúcsban összefutó él  $\frac{\sqrt[3]{k}}{a}$ ,  $\frac{\sqrt[3]{k}}{b}$ ,  $ab\sqrt[3]{k}$  s a felszín mérőszáma

$$2\sqrt[3]{k^2}\left(a + b + \frac{1}{ab}\right);$$

ezt most úgy akarjuk meghatározni, hogy  $k$ , tehát  $2\sqrt[3]{k^2}$  is, lehető legnagyobb legyen, a mit úgy érhetünk el, hogy a másik tényezőt,  $a + b + \frac{1}{ab}$ -t lehető legkisebbnek vesszük fel. Ez pedig az előbbi bizonyítás alapján akkor legkisebb, a mikor  $a=b=1$ , s minden más esetben nagyobb. Ha pedig  $a=b=1$ , akkor a paralelepipedon kocka.

*König Dénes.*



## A HÁROMSZÖG OLDALAIN EMELT NÉGYZETEKRŐL.

1. Az  $ABC$  háromszögnek (1. ábra) oldalain emelt  $BC12$ ,  $CA34$ ,  $AB56$  négyzetek 1, 2, 3, 4, 5, 6 csúcsai általában nincsenek egy kúpszeleten. Szándékom meghatározni, vajjon mily alakúnak kell  $ABC$ -nek lennie, hogy e hat pont egy kúpszeleten legyen.

A feladat analitikai tárgyalásánál válaszszuk koordináta-tengelynek az  $AB$  oldalt és az erre merőleges magassági vonalat. A háromszög csücsainak koordinátái:

$$A=(x_1, 0), \quad B=(x_2, 0), \quad C=(0, m).$$

Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontok rendre

$$\begin{array}{lll} (m, x_2+m) & (x_2+m, x_2) & (x_1-m, -x_1) \\ (-m, -x_1+m) & (x_2, x_1-x_2) & (x_1, x_1-x_2). \end{array} \quad 1)$$

Hogy ezek egy kúpszeleten legyenek, arra szükséges és elégséges, hogy a 2356 pontokon keresztül fektethető kúpszeletsornak az 1 ponton és a 4 ponton átmenő kúpszelete egymással azonos legyen.

A 35 és 26 alkotta egyenes pár egyenlete

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1-m & -x_1 & 1 \\ x_2 & x_1-x_2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2+m & x_2 & 1 \\ x_1 & x_1-x_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

vagy kifejtve és az utolsó tényezőben az előjeleket ellenkezőre változtatva:

$$\begin{aligned} & (x(x_2-2x_1)+y(x_2-x_1+m)+x_1^2+m(x_2-x_1)). \\ & (x(x_1-2x_2)+y(x_2-x_1+m)+x_2^2+m(x_2-x_1))=0. \end{aligned}$$







lyekbe a kúpszelet sor egyenlete az 1 illetőleg a 4 pont koordinátáinak behelyettesítésénél átmegy. Ezen egyenletek:

$$(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + 4m(x_2 - x_1) + m^2)(2x_2^2 - x_1x_2 + m(x_2 - x_1) + m^2) + \\ + \lambda(2x_1^2 - x_1x_2 + 3m(x_2 - x_1) + m^2)(2x_2^2 - x_1x_2 + m^2) = 0$$

és

$$(2x_1^2 - x_1x_2 + m(x_2 - x_1) + m^2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + 4m(x_2 - x_1) + m^2) \\ + \lambda(2x_1^2 - x_1x_2 + m^2)(2x_2^2 - x_1x_2 + 3m(x_2 - x_1) + m^2) = 0,$$

vagy rövidebben:

$$\frac{1}{2}(p + q + 8m(x_2 - x_1))(q + m(x_2 - x_1)) + \lambda(p + 3m(x_2 - x_1))q = 0$$

és

$$\frac{1}{2}(p + m(x_2 - x_1))(p + q + 8m(x_2 - x_1)) + \lambda p(q + 3m(x_2 - x_1)) = 0,$$

hol

$$p = 2x_1^2 - x_1x_2 + m^2,$$

$$q = 2x_2^2 - x_1x_2 + m^2.$$

A keresett feltételi egyenletet innen úgy kapjuk, hogy  $\lambda$ -t a két egyenletből elimináljuk. Leszen:

$$(p + q + 8m(x_2 - x_1)) \begin{vmatrix} q + m(x_2 - x_1) & pq + 3qm(x_2 - x_1) \\ p + m(x_2 - x_1) & pq + 3pm(x_2 - x_1) \end{vmatrix} = 0. \quad 2)$$

Ha még a determináns második sorából kivonjuk az első sort és  $(p - q)$ -t kiemeljük, úgy

$$(p + q + 8m(x_2 - x_1))(p - q) \begin{vmatrix} q + m(x_2 - x_1) & pq + 3qm(x_2 - x_1) \\ 1 & 3m(x_2 - x_1) \end{vmatrix}$$

Tehát

$$(p + q + 8m(x_2 - x_1))(p - q)(3m^2(x_2 - x_1)^2 - pq) = 0. \quad 3)$$

Ha a háromszög oldalait  $a$ ,  $b$ ,  $c$ -vel és területét  $t$ -vel jelöljük, akkor ezen egyenletben:

$$p + q = (x_1^2 + m^2) + (x_2^2 + m^2) + (x_1 - x_2)^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$p - q = 2(x_1^2 - x_2^2) = 2(x_1^2 + m^2 - (x_2^2 + m^2)) = 2(a^2 - b^2),$$



továbbá

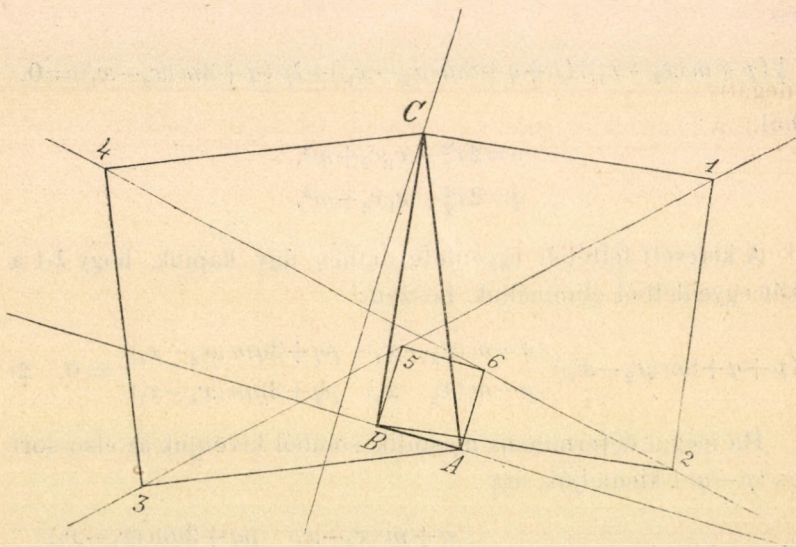
$$\begin{aligned} pq &= m^4 + 2m^2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) + 5x_1x_2^2 - 2x_1^3x_2 - 2x_1x_2^3 = \\ &= (m^2 + x_1^2)(m^2 + x_2^2) + m^2(x_1 - x_2)^2 - 2x_1x_2(x_1 - x_2)^2 = \\ &= a^2b^2 + (m^2 - x_1^2 - x_2^2)(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^4 \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} pq - 3m^2(x_1 - x_2)^2 &= a^2b^2 - (2m^2 + x_1^2 + x_2^2)(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^4 \\ &= a^2b^2 - (a^2 + b^2)c^2 + c^4 \\ &= (a^2 - c^2)(b^2 - c^2), \end{aligned}$$

vége

$$m(x_2 - x_1) = 2t.$$



2. ábra.

Ezeket 3) alatt behelyettesítvén, a keresett feltételi egyenletet a következő alakban nyerjük:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + 16t)(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2) = 0. \quad 4)$$

2. Hogy a vizsgált hat pontnak koordinátáit  $ABC$  koordinátáiból az 1) alatti képletek adják meg, a  $BC12$  stb. négyzeteket negatív körülírásúaknak kell rajzolnunk. Tehát e négyzetek a három-



szögön kívül emelendők, ha  $ABC$  pozitív körülírású (mint az 1. ábrában), ellenben e négyzetek a  $BC$  stb. belső oldalán emelendők, ha  $ABC$  negatív körülírású (mint a 2. ábrában).

Számításunk tehát két feladatnak adja megoldását:

A) mikor vannak a háromszög oldalain kívül emelt négyzetek 1, 2, 3, 4, 5, 6 csúcsai egy kúpszeleten,

B) mikor vannak a  $BC$ ,  $CA$  és  $AB$  belső oldalán emelt négyzetek 1, 2, 3, 4, 5, 6 csúcsai egy kúpszeleten.

Valamely háromszög, mely a 4) alatti egyenletet kielégíti, az A) problémának adja megoldását, ha pozitív körülírású, ellenben a B) problémának akkor, ha

$$t = \frac{m(x_2 - x_1)}{2}$$

negatív.

3. A 4) alatti egyenlet vagy úgy elégíthető ki, hogy az

$$a^2 = b^2 \quad a^2 = c^2 \quad b^2 = c^2$$

képletek egyike áll fenn, azaz a háromszög *egyenszárú*, vagy pedig úgy, hogy

$$a^2 + b^2 + c^2 + 16t = 0.$$

Egyenszárú háromszög esetében a csúcsok alkalmas jelölésével a háromszöget pozitív körülírásúvá, és a csúcsok más jelölésével negatív körülírásúvá tehetjük, és mind a két esetben ki fogja elégíteni a 4) alatti egyenletet. Tehát egyenszárú háromszögnél akár az oldalak külső oldalán, akár azok belső oldalán emelünk négyzeteket, a vizsgált hat pont egy-egy kúpszeleten van. (Ez különben PASCAL tételének segítségével minden számítás nélkül közvetlenül belátható.)

A második eset akkor áll be, ha a háromszög területe az oldalak fölött emelt négyzetek összegének tizenhatodrészesével egyenlő és a négyzeteket  $BC$ ,  $CA$  és  $AB$  belső oldalán emeljük. Még pedig ez esetben a szóban forgó kúpszelet oly *egyenespár*, melynek egyik egyenese az 1, 3 és 5 pontokon megy keresztül, másik egyenese pedig a 2, 4 és 6 pontokon. (2. ábra.) Ugyanis



$$a^2 + b^2 + c^2 + 16t$$

azaz

$$p + q + 8m(x_2 - x_1)$$

csak egy számbeli együtthatóban különbözik azoktól a kifejezésektől, melyekbe a 35 és 26 egyenesek egyenleteinek baloldalai átmennek, ha azokba az 1, illetőleg 4 pont koordinátáit helyettesítjük.

Derékszögű háromszögnél ez az eset akkor áll be, ha az egyik szög  $15^\circ$ -ú.

*Jakobovits Dániel.*

### KITÜZÖTT FELADATOK.

Folyóiratunk utolsó füzetében kitüzött feladatok közül a 31.-be néhány értelemzavaró sajtóhiba csuszott bele. A helyreigazított feladat így hangzik:

33. Legyen

$$S_n = \sum (-1)^{x_1 + x_2 + \dots + x_m} \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_m - 1)!}{x_1! x_2! \dots x_m!},$$

a hol az összegezés az

$$x_1 + 2x_2 + \dots + mx_m = n$$

diophantusi egyenlet minden nem negatív egész számokból álló megoldására kiterjesztendő. Bizonyítsák be, hogy  $S_n = -\frac{1}{n}$ , ha  $n$   $(m+1)$ -gyel nem osztható és  $S_n = \frac{m}{n}$ , ha  $n$  osztható  $(m+1)$ -gyel.

(Rados G.)



## ADALÉK A KAMATSZÁMOLÁS ELMÉLETÉHEZ.

(Második közlemény.)

Az egyszerű kamatszámolás és a folytonos tőkésítés képleteit egy általánosabb formulában fogom összefoglalni, a melynek megfelelő differenciálegyenlet a következő:

$$\frac{dy}{dx} = y_0 p + (y - y_0) r,$$

mely azt fejezi ki, hogy míg a kezdetleges tőke  $p$  kamatláb mellett kamatozik, addig a kamatok  $r$  kamatláb mellett gyümölcsöznek. Ennek integrációja folytán kapjuk a következő formulát:

$$y = y_0 + y_0 p \frac{e^{rx} - 1}{r},$$

mely formula, ha  $r$  vég nélkül kisebbedik az egyszerű kamatszámolás formulájává, ha pedig

$$p = r$$

a folytonos tőkésítés képletévé alakul át.

Ebből kitűnik, hogy az egyszerű kamatszámolás a *kamatokat holt tőkének* tekinti, melyek kamatokat nem hoznak, a folytonos tőkésítés ellenben a kamatokat ép oly kamatlábbal kamatoztatja mint magát a tőkét. E körülmény indokolja a «folytonos tőkésítés» elnevezést.

★

Ezek alapján áttérhetünk annak vizsgálatára, hogy melyik a *helyes formula*. Ez tisztán matematikai alapon nem lehetséges. A gyakorlat sem dönt ebben közvetlenül, mert nem törődik azzal, hogy a kölcsönzési idő alatt mint gyűlik össze a kamat. Tényleg,



a míg csak *egy egyetlen kölcsönről* van szó, tekintet nélkül minden más kölcsönre, addig a kamatformula a megállapodás dolga. Sőt addig minden kamatszámolást mellőzhetünk azáltal, hogy a kamatláb helyett mindjárt a kamatot szabjuk meg, mert a kamatláb szereplésének ilyenkor nem volna célja.

Helyes formuláról csak azon esetben lehet szó, ha kölcsönöket előnyösségükre nézve hasonlítunk össze, a mely eset mindig fennforog azoknál, a kik a kikölcsönzést iparszerűen üzik.

Ilyenkor a gyakorlat két követelménynyel áll elő, melyek a helyes formula megállapítására vezetnek. Az első az, hogy a gyakorlat a *kamatláb*at fogadja el a *kölcsön előnyösségének egyedüli mértékéül*, vagyis két oly kölcsönt, melyeket egyforma kamatláb mellett és a helyes kamatformula alapján adunk ki, egyforma előnyösségűnek kell tekintenünk, még azon esetben is, ha a kölcsöntartamok különbözők.

De a kölcsönadó az egyenlő előnyösséget a végértékből ítéli meg és pedig egyforma előnyösnek azon esetben tart két különböző tartalmú kölcsönt, *ha a rövidebb kölcsönt újra kölcsön adva a hátralevő időre, ugyanazon végértéket kapja, mint a hosszabb kölcsönnél*, ha a többi feltétel megegyező.

E követelménynek bármely képlet felel meg azon feltétel alatt, hogy a kamatokat a megújított kölcsönnél is ép úgy számítjuk, mint az előző kölcsönnél, vagyis, hogy a tőke kezdetleges értékét, az  $y_0$ -t,  $p$  kamatláb mellett, az  $y_0$ -nak összes kamatait pedig  $r$  kamatláb mellett gyümölcsöztetjük. Mert ha a rövidebb kölcsön tartama  $x_1$ , a megújított kölcsön tartama  $x_2$ , a hosszabbé  $(x_1 + x_2)$ , akkor a felszaporodott érték az első időtartam alatt az általános képlet szerint:

$$y_0 \left( 1 + \frac{p}{r} e^{rx_1} - \frac{p}{r} \right).$$

Ha a hátralevő  $x_2$  időre az  $y_0$ -t most  $p$ , a kamatokat pedig  $r$  kamatláb mellett kamatoztatjuk, az  $(x_1 + x_2)$  időtartam végére a következő értéket kapjuk:

$$y_0 \left( 1 + \frac{p}{r} e^{rx_2} - \frac{p}{r} \right) + y_0 \left( \frac{p}{r} e^{rx_1} - \frac{p}{r} \right) e^{rx_2}.$$



Ez pedig azonos az

$$y_0 \left( 1 + \frac{p}{r} e^{r(x_1 + x_2)} - \frac{p}{r} \right)$$

végértékkel, melyet kapunk, ha az  $y_0$  tőkét egyszerre  $(x_1 + x_2)$  időtartamra adjuk ki.

Ebből következik az, hogy ha a *tőke kezdetleges értékét nyilván tartjuk*, akkor minden formulát, tehát az egyszerű kamatszámolás formuláját is alkalmazhatjuk a kölcsönök összehasonlításánál. Csakhogy itt  $r=0$  lévén, arra kell ügyelnünk, nehogy a kamatok után is kamatokat számítsunk; mert mindazon ellentmondások, melyekre jutunk, ha a folyószámláknál vagy kölcsöntörlesztések-nél az egyszerű kamatszámolást alkalmazzuk, onnan erednek, hogy ilyenkor kamatok után is számítunk kamatokat megállapodásunk ellenére.

De a kezdetleges tőke folytonos nyilvántartása elviselhetetlen terhet róna a gyakorlatra; gazdasági szempontból pedig semmi értelme sem volna annak, hogy egy bizonyos pénzösszeget kezdetleges tőkére és kamatokra bontsunk, mert a pénzösszeg további használhatósága annak származásától független. Már pedig a tőke kezdetleges értékének nyilvántartása alól a gyakorlatot csak úgy oldhatjuk fel, ha a *kezdetleges tőkét ép oly mértékben kamatoztatjuk, mint kamatait*. A két kamatlábat tehát egyforma nagynak kell feltételeznünk, a minek az előbbiek szerint csak a folytonos vagy időszakos tőkésítés képlete felel meg.

Vizsgálatunk eredménye tehát a következő: *ha egyrészt ragaszkodunk a gyakorlat ama követelményéhez, hogy a kamatláb a kölcsön előnyösségének mértéke legyen, másrészt ha a tőke kezdetleges értékének nyilvántartása alól szabadulni óhajtunk, úgy a folytonos vagy időszakos tőkésítés képleteit szabad csak alkalmaznunk.*

A helyes kamatformulának, mint a gyakorlat követelményének, megállapítása LEWIN-től ered («Aphoristikus megjegyzések a politikai számtanhoz» 1875), a ki egyenesen a

$$f(x_1)f(x_2)=f(x_1+x_2)$$



függvényegyenletből indul ki, mely őt az időszakos tőkésítés kép-  
letéhez vezeti.

★

A kamatos kamat vagy a folytonos tőkésítés képlete nem oly könnyen kezelhető mint az egyszerű kamatszámolásé. Ügyessé-  
get a logaritmussal való számolásban még a hitelintézetek  
alkalmazottjairól sem tételezhetünk fel, még kevésbé a közön-  
ség részéről.

Vizsgálni fogjuk tehát, lehet-e és *mily határok közt az egy-  
szerű kamatszámolást alkalmazni* a nélkül, hogy számottevő  
hibát követnénk el.

A kétféle számítási mód eredménye közti különbség

$$f(x) = (1+p)^x - (1+px) = \binom{x}{2} p^2 + \binom{x}{3} p^3 + \dots \quad (6)$$

( $p < 1$ ),  $x$ -nek az egységnél kisebb értékeire negatív, különben  
pozitív, vagyis *az időegységnél kisebb tartamra az egyszerű ka-  
mat, nagyobb időtartamra a kamatos kamat nagyobb.* (2. ábra).  
Először is az első esettel foglalkozunk.

A maximális eltérésnek megfelelő  $x$ -et a

$$\frac{df}{dx} = 0,$$

egyenletből lehet kiszámítani. Hétjegyű logaritmussal  $e$  célra  
nem elég pontosak; sokkal kényelmesebb és eléggé pontos ered-  
ményeket is ad az

$$x = \frac{24 - 10p + 5p^2}{48 - 24p + 14p^2}$$

formula, melyet úgy kapunk, ha a 6) alatti sort tagonként diffe-  
rencziáljuk, a differenciálhányadosba

$$x = \frac{1}{2} + y$$

helyettesítése után, az  $y$ -nak második, a  $p$ -nek harmadik és ma-  
gasabb hatványait elhanyagoljuk. Maga a maximális eltérés a 6)  
alatti egyenletnek megfelelően közelítőleg a kamatláb négyzeté-  
vel arányos, a mint az a következő táblázatból kitűnik:



%	$x$	A maximális eltérés 1000 egység után	Fél napi kamat
1	0·500415	0·013	( $\frac{1}{4}$ év) 0·056
2	0·500825	0·050	( $\frac{1}{2}$ év) 0·056
$2\frac{1}{4}$	0·500927	0·063	" 0·063
$2\frac{1}{2}$	0·501028	0·077	" 0·069
3	0·501231	0·111	" 0·083
4	0·501632	0·199	(év) 0·056
5	0·502028	0·311	" 0·069

A megengedett hiba határául egy fél napi kamatot állapíthatunk meg, mert a kölcsön tartamát nagyobb pontossággal úgy sem szokták meghatározni. A relatív kamatlábaknál (évi 4%, fél-évi 2%, negyedévi 1%) a félnapi egyszerű kamat állandó, mert az egyenes is megmarad. De a megfelelő kamatgörbe annál kisebb részt metsz le az egyenesből és annál jobban simul az egységnyi közben hozzá, mennél kisebb az időegység. A maximális eltérés tehát annál kisebb, mennél kisebb időegységet választunk, még pedig négyzetes arányban.

Ha a határra térünk át

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = e^p,$$

lévén, az egyenes érinti a görbét s a maximális eltérés végtelen kicsiny.

Innen van az, hogy a táblázat szerint a 2%-os kamatláb az időegységen belül még használható, míg a relatív 4%-nál a maximális hiba a megengedett határt túllépi.

Nálunk az időegység névleg az év, de tényleg a félév, mert a takarékpénztárak félvévenként csatolják a kamatot a tőkéhez, a kötvények szelvényeire félvévenként fizetik a kamatokat, kölcsöntörlesztéseknél az annuitások szintén félvévenként esedékesek. Ha az életben pl. 4%-ról beszélnek, majdnem mindig félévi 2%-ot kell alatta értenünk. A táblázathból rögtön kitűnik, hogy követelményünknek a használatos kamatlábak közül csak a negyedévi felelnek meg és a félévi egészen  $2\frac{1}{2}\%$ -ig.



Annak feltüntetésére, hogy a kölcsön előnyösségében mennyire tévedhetünk, ha az egyszerű kamatszámolást alkalmazzuk, szolgál a következő tábla, mely a valódi kamatlábat adja meg, vagyis hogy mily kamatláb felelne meg az egyszerű kamatnak a maximális eltérés idejére, ha kamatos kamattal számolnánk. E kamatláb az

$$(1+p')^x = 1 + px$$

egyenletből  $x = \frac{1}{2}$ -nek megfelelően közelítőleg

$$p' = p + \frac{p^2}{4}.$$

%	Valódi kamatláb	Különbség
1	1.0025	0.0025
2	2.0100	0.0100
$2\frac{1}{4}$	2.2626	0.0126
$2\frac{1}{2}$	2.5155	0.0155
3	3.0224	0.0224
4	4.0399	0.0399
5	5.0620	0.0620

A pénzpiaczon  $\frac{1}{32}\%$  a legkevesebb, a mit rövid kölcsönöknél még tekintetbe vesznek. Az 5%-os kamatláb az egyszerű kamatszámolásnál már e szempontból sem használható, mert a maximális eltérésre  $\frac{1}{16}\%$ -kal kisebb mint a valódi kamatláb.

Az egységnél nagyobb időtartamon túl a végértékek közti különbség rohamosan növekszik. Így az eltérés közelítőleg minden kamatlábnál már

$$x = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} = 1.207$$

időtartamra oly nagy mint az egységnyi közben a maximális; 1.5 időegységre az eltérés háromszoros, 2 egységre nyolczszoros.

Az egyszerű kamatszámolást tehát a használatos negyedévi és félévi kamatlábakkal csak az időegységen belül alkalmazhatjuk a nélkül, hogy akár a kamat nagyságában, akár a kölcsön előnyösségének megítélésében érezhetően tévednénk. Az időegysé-



gen túl lebonyolítandó ügyleteknél azonban a kamatos kamatszámolást kell alkalmaznunk.

★

Eddigelé csupán pozitív  $x$ -ekre terjeszkedtünk ki, most azt esetet fogjuk vizsgálni, mikor az  $x$  *negatív*. Az  $y_0$  ekkor a később esedékes értéket, az  $y$  a korábbi értéket jelenti, vagyis a tőke értékét  $x$  idővel az  $y_0$  érték lejáratá előtt. Az  $y_0$  például valamely váltó értéke lejáratakor, tehát a váltó névértéke; az  $y$  a váltó értéke bizonyos idővel a váltó lejáratá előtt, tehát a váltó készpénz értéke. Az  $y$  a tényleges kölcsön, az  $y_0$  a felszaporodott érték. Midőn az  $x$ -nek pozitív értékeket tulajdonítottunk a korábbi értékből a későbbi értékre következtettünk s ezt felkamatolásnak neveztük, most az ellenkező irányban haladva, eljárásunkat *leszámolásnak*, *diszkontálásnak* nevezhetjük.

A gyakorlat fennebbi két követelményének a folytonos vagy időszakos tőkésítés képlete negatív  $x$ -ek esetén is eleget tesz, míg az egyszerű kamatszámolás azoknak ezen esetben sem felel meg. Mert, ha a negatív jelet kiteszszük, a discontált érték:

$$y = y_0 e^{-rx},$$

itt az  $y_0$  az alapérték, az  $y$  pedig a korábbi érték. Ez azonban csak a felfogás dolga, mert attól függ, milyen időpontot választunk kiindulópontul; a mi tetszőleges. Az itt fellépő viszonyokat felfoghatjuk úgy is, hogy  $y$  az alapérték,  $y_0$  pedig annak későbbi vagy felkamatolt értéke. Tényleg, a ki pl. váltóleszámolásba fekteti pénzét, arra nézve az  $y$  a készpénzérték vagy a befektetett tőke, az  $y_0$  pedig e tőkének későbbi értéke, vagyis e tőkének és hozadékának összege.

Ha tehát az  $y$ -t  $x$  időtartamra felkamatoljuk, még pedig a folytonos tőkésítés képletével, melyet a pozitív irányra nézve eddig már érvényesnek ismertünk el, az  $y_0$ -t kell kapnunk. És tényleg

$$ye^{rx} = y_0 e^{-rx}. \quad e^{rx} = y_0, \quad 7)$$

a mi azt bizonyítja, hogy a leszámolás helyes volt.



Ugyanezen eredményre jutunk, ha leszámolásra az időszakos tőkésítés képletét alkalmazzuk.

De ha az egyszerű kamatszámolás formulájával diszkontálunk,

$$y = y_0(1 - px)$$

értéket kapjuk, mely a folytonos tőkésítés, sőt az egyszerű kamatszámolás formulájával felkamatolva sem adja meg az eredeti  $y_0$  értéket. Az egyszerű kamatszámolás képletétől tehát az általános használhatóságot negatív  $x$ -ekre nézve is meg kell tagadnunk.

De még közelítő formulának sem tekinthetjük, mert az eltérés a helyesnek talált értéktől, melyet az időszakos tőkésítés képlete a megfelelő adatokra adna, már az időegységen belül közel akkora, mint pozitív  $x$ -ekre egy és két időegység közt. Sőt mivel a megfelelő egyenes az

$$x = -\frac{1}{p}, \quad y = 0$$

pontban metszi az  $x$  tengelyt, az egyszerű kamatszámolás képlete negatív  $x$ -ekre alkalmazva azt az abszurdumot mondja ki, hogy egy tőkének bizonyos idő előtt semmi vagy negatív értéke volt.

A szembeszökő valótlanságok, melyekre jutunk, ha az egyszerű kamatszámolás formuláját diszkontálásra alkalmazzuk, indították a matematikusokat és jogtudósokat arra, hogy a kamatszámolással bővebben foglalkozzanak s tényleg LEIBNIZ a diszkontálás céljából vezette le formuláját.

★

A kereskedelmi számtan, hogy a diszkontálásra a kamatos kamat képleténél egyszerűbb és bizonyos határok közt mégis alkalmazható formulát nyerjen, a kamatláb helyett avval egyenlőrangú és jogosultságú fogalmat hoz be, a diszkontláb fogalmát. Indokolja ezt azzal, hogy a számítás alapja megváltozott. Az első esetben, a míg t. i. pozitív értelemben haladtunk, az  $y_0$  alapérték volt a legkorábban esedékes, tehát a legkisebb érték, és az 1) egyenlet



alapján erre vonatkozott az egész időtartam alatt a kamatláb. A második esetben, midőn negatív értelemben haladunk, az  $y_0$  alapérték legkésőbb esedékes, tehát a legnagyobb érték, és a kamatlábat az 1) egyenlet szerint erre vonatkoztattuk az egész időtartam alatt. Ugyanazon kamatláb tehát e két esetben a kamatozásnak más és más értéke.

E különbség feltüntetése végett, ha a negatív irányról, tehát diszkontálásról van szó, kamatláb helyett *diszkontláb*at mondunk és e képletet használjuk:

$$y = y_0(1 + dx),$$

hol az  $x$  negatív. Ha itt  $y_0 = 1$  és  $x = -1$ , akkor

$$y = 1 - d,$$

vagyis diszkontláb alatt értjük az időegység múlva esedékes tőkeegységnek diszkontját vagyis e tőkeegységből való levonást.

Diszkontláb helyett néha *előleges kamatláb*at is mondanak, a mennyiben a később fizetendő összeget,  $y_0$ -t, tekintik a kölcsön névértékének, melyből a tényleges kölcsönt,  $y$ -t, úgy származtatják, hogy a kölcsöndíjat a kölcsön felvételekor azonnal levonják. Az eddig használt kamatlábat az előleges kamatlábbal szemben még *utólagos kamatlábnak* is nevezzük. Az utólagos kamatláb a korábbi, az előleges a későbbi tőkeértékre vonatkozik mint alapösszegre.

A « $d$ » diszkontlábát akkor mondjuk egyenértékűnek a « $p$ » kamatlábbal, ha az

$$y = y_0(1 + dx)$$

egyenest az

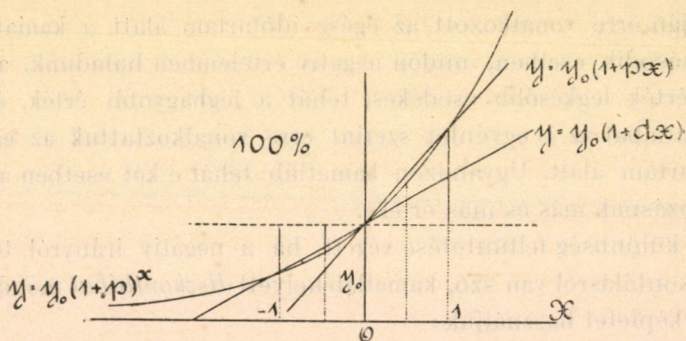
$$y = y_0(1 + p)^x$$

görbét  $x = -1$  ordináta mentén metszi, vagyis ha

$$(1 + p)^{-1} = 1 - d$$

(3. ábra).





3. ábra.

Innen határozhatók meg az egyenlő értékű kamatlábak:

elől. klb.	utól. klb.	utól. klb.	elől. klb.
1%	$1^{1/99} \%$	1%	$100/101 \%$
2%	$2^{2/49} \%$	2%	$1^{49/51} \%$
3%	$3^{3/97} \%$	3%	$2^{94/103} \%$
4%	$4^{1/6} \%$	4%	$3^{11/13} \%$
5%	$5^{5/19} \%$	5%	$4^{16/21} \%$

A fenti egyenlet mindkét oldalát a  $-x$ -edik hatványra emelve

$$y = (1+p)^x = \left( \frac{1}{1-d} \right)^x = e^{rx}$$

egyenletet kapjuk, mely kimondja, hogy egyenlőértékű kamatlábak esetén a megfelelő görbék azonosak.

Az  $y = y_0(1+dx)$  egyenest most már az

$$y = y_0 \left( \frac{1}{1-d} \right)^x = y_0(1-d)^{-x}$$

görbével vethetjük össze. Ha a görbe és az egyenes egyenletében explicite kifejezzük, hogy az  $x$  negatív:

$$y = y_0(1-dx) \quad \text{és} \quad y = y_0(1-d)^x$$

egyenleteket kapjuk, hol pozitív  $x$ -eket veszünk figyelembe.



Az eltérés a görbe és az egyenes közt:

$$(1-d)^x - (1-dx) = \binom{x}{2} d^2 - \binom{x}{3} d^3 + \dots \quad (8)$$

hol  $d < 1$ . Ha  $x < 1$ , akkor minden tagja negatív, a görbe tehát e darabon az egyenes és az  $x$  tengely közt halad. (4. ábra).

A 6) és 8) alatti egyenletek összevetéséből azonnal kitűnik, hogy a gyakorlatban használt diszkontlábakra az egységnyi közben a maximális eltérés valamint a diszkontlábak közötti különbség is közel oly nagy mint a kamatszámolásnál. Azért is az egyszerű discontszámolást ugyanazon korlátozásokkal használhatjuk, mint az egyszerű kamatszámolást.

★

A *diszkontálásnak* az a célja, hogy a később esedékes érték alapján a korábbi meghatározza. Az

$$y = y_0(1+dx)$$

formulával ez előleges kamatláb segítségével történik. Azért ezen eljárást *előleges diszkontálásnak* is nevezhetjük. De a később esedékes összegből a korábban lejárót még utólagos kamatláb segítségével is meghatározhatjuk. E célra csak  $y_0$ -t kell a kamatszámolás képletéből kikeresnünk:

$$y_0 = \frac{y}{1+dx},$$

hol az  $x$  pozitív (HOFFMANN-féle formula 1731). Ha e képlet sze-

A *felkamatolásnak* célja az, hogy a korábban esedékes érték alapján a későbbi meghatározza. Az

$$y = y_0(1+px)$$

formulával ez utólagos kamatláb segítségével történik. Azért ezen eljárást *utólagos felkamatolásnak* is nevezhetjük. De a korábban esedékes összegből a későbbben lejárót még előleges kamatláb segítségével is meghatározhatjuk. E célra csak  $y_0$ -t kell a diszkontszámolás képletéből kikeresnünk:

$$y_0 = \frac{y}{1+dx},$$

hol az  $x$  negatív. Ha e képlet szerint számolunk, szintén fel-



rint számolunk, szintén diszkontálunk csakhogy utólagos kamatlábbal, azért ezen eljárást *utólagos diszkontálásnak* is nevezhetjük. Ezt akkor használjuk, ha adva van a nagyobbított vagy felkamatolt tőke és az alapértéket keressük.

Ha az

$$y_0 = \frac{y}{1+px}$$

egyenletben az  $y$ -t állandónak, az  $y_0$ -t pedig változónak tekintjük, egyenoldalú hiperbolát kapunk, melynek aszimptotái az  $x$  tengely és  $x = -\frac{1}{p}$  ordináta.

Mi a görbének csak azon ágát vesszük tekintetbe, mely az  $x=0$ ,  $y=y_0$  ponton keresztül megy. Ha e görbét az  $y$  tengely körül a másik negyedbe forgatjuk, vagyis ha egyenletében  $x$  helyébe  $-x$ -et teszünk, akkor a folytonos tőkésítésnek és az előleges diszkontálásnak görbéjével közvetlenül összehasonlíthatjuk. E célra szolgál a 4. ábra, melyből kitetszik, hogy egyenlőértékű kamatlábakat tételezve fel, az időegységen belül legnagyobb az előlegesen, legkisebb az utólagosan diszkontált érték.

kamatolunk, csakhogy előleges kamatlábbal, azért ezen eljárást *előleges felkamatolásnak* is nevezhetjük. Ezt akkor használjuk, ha adva van a kisebbített vagy diszkontált tőke és az alapértéket keressük.

Ha az

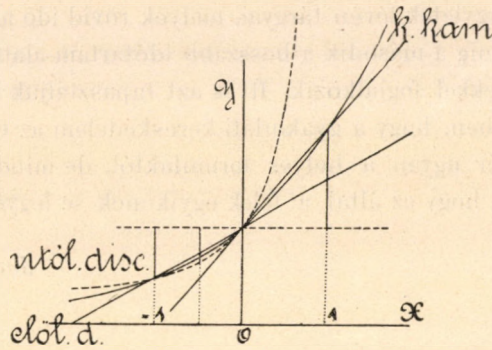
$$y_0 = \frac{y}{1+dx}$$

egyenletben az  $y$ -t állandónak, az  $y_0$ -t pedig változónak tekintjük, egyenoldalú hiperbolát kapunk, melynek aszimptotái az  $x$  tengely és az  $x = -\frac{1}{d}$  ordi-

náta. Mi e görbének csak azon ágát vesszük tekintetbe, mely az  $x=0$ ,  $y=y_0$  ponton keresztül megy. Ha e görbét az  $y$  tengely körül a másik negyedbe forgatjuk, vagyis ha egyenletében  $x$  helyébe  $-x$ -et teszünk, akkor a folytonos tőkésítésnek és az utólagos felkamatolásnak görbéjével közvetlenül összehasonlíthatjuk. E célra szolgál az 5. ábra, melyből kitetszik, hogy egyenértékű kamatlábakat tételezve fel, az időegységen belül legnagyobb az utólagosan, legkisebb az előlegesen, felkamatolt érték.

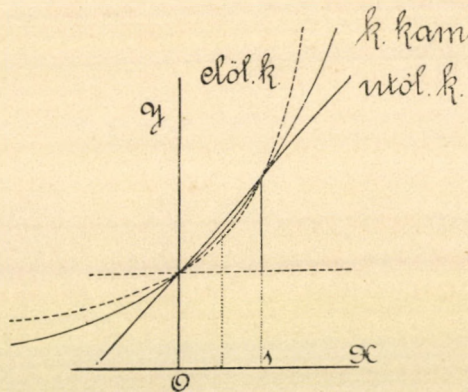


A folytonos tőkésítés görbéje a két görbe között halad, s az eltérés e közben annak mindkét oldalán közelítőleg egyenlő, a mint az a megfelelő képletek összehasonlításából kitűnik. Az egyszerű kamat, illetve diszkontszámolás formulái tehát az időegységen belül egyforma közelítéssel használhatók.



4. ábra.

Az utólagos és az előleges kamatlábaknak szembeállítása illetve egyenrangúságoknak kimutatása tudtommal szintén LEWIN-től ered.



5. ábra.

A kereskedelmi gyakorlat a kamatszámolás alkalmazásánál legalább a mai kamatlábviszonyok mellett eléggé megfelel köve-



telményeinknek, a mennyiben az egyszerű kamatszámolást és diszkontszámolást csakis féléven belül használja  $2\frac{1}{2}$ —3%-ig, hosszabb időre azonban a kamatos kamatszámolás képleteivel számol. Így oszlik meg a gyakorlatban a tágabb értelemben vett kereskedelmi számtan kereskedelmi és politikai számtanra. Az elsőnek oly ügyletek lévén tárgyai, melyek rövid idő alatt bonyolítatnak le, míg a második a hosszabb időtartam alatt lebonyolítandó ügyletekkel foglalkozik. Itt is azt tapasztaljuk tehát, mint sok más esetben, hogy a gyakorlati kereskedelem az egyszerűség kedvéért eltér ugyan a helyes formuláktól, de mindig csak oly határok közt, hogy ez által a felek egyikének se legyen számbavehető kára.

*Juckel Gyula.*



## A TESTEK HALMAZÁLLAPOTAIRÓL.\*

(Első közlemény.)

### BEVEZETÉS.

#### A halmazállapotok folytonos átmenetének kérdése.

A halmazállapotok között történő átmenetek kérdésének tisztázása és legalább részben való eldöntése a jelen század physikai kutatásainak egyik legjelentékenyebb eredménye. A különböző halmazállapotokról természetesen már a legrégibb idők óta volt az embereknek tudomásuk, azonban a közöttük létező esetleges kapcsolatok megvizsgálására sokáig nem gondoltak. Ha a test az egyik halmazállapotból átment a másikba, úgy gondolták, hogy az akkor lényegére megváltozott, hogy teljesen más test, mint az előbb, mint azt az ide vonatkozó hypothetikus nézetek is igazolják. DESCARTES azt mondja, hogy a szilárd test részei nyugszanak, a folyékonyéi mozognak s míg a szilárd test részecskéi egymásba fogódnak, a folyékonyéi egymáson könnyen elcsúszhatnak. GASSENDI-nél azt a nézetet találjuk, hogy a szilárd test részecskéi horgocsákkal kapaszkodnak egymásba, a folyékony test részecskéi pedig csak kevés pontban függnek össze.

A halmazállapotokra nézve a jelen század elejének álláspontját következőkben vázolhatjuk. Vannak szilárd, cseppfolyós és légnemű testek, vagy mint az utóbbiakat nevezni szokták, rugalmas folyadékok; a *szilárd* testek, legalább a mennyire azt az eszközök tökéletlensége engedi, átvihetők a folyékony állapotba meleg hozzávevete által, a *cseppfolyós* testek pedig *gőzállapotba* s vannak szilárd

---

\* A kir. magy. Term. tud. Társulat 1899. évi közgyűlésén a Bugát-díjjal jutalmazott pályamunka.



testek, melyek mindjárt gőzállapotba mennek át. A gőzök légnemű testek, azonban vannak még más légnemű testek is, a *gázok*; a gőz- és gázállapot között átmenet nem volt létesíthető.

Ezen felfogásban tehát a testek két teljesen külön álló csoportba oszoltak; egyikben voltak a szilárd, folyékony testek és gőzök, melyek között valamilyen átmenet lehetséges volt, a másikat alkották a gázok, mely állapotból átmenet a gőzállapotba nem volt létesíthető.

Egységesebb nézetet csak a század második felében hoztak létre ANDREWS vizsgálatai, melyek a gázok és gőzök között fennálló rideg válaszfalat ledöntötték az által, hogy a gázalakú testek cseppfolyósítását döntő kísérletekkel kimutatták.

Ezen kísérleteknek szintén meg voltak történeti előzményeik. FARADAY volt az első, kinek a gázok folyósítása sikerült. Erős falú, meghajlított s mindkét végén zárt üvegcsövet használt, ennek egyik végébe került az illető anyag, melyből melegítéskor a gáz keletkezett, másik vége pedig hűtőkeverékbe merült. A keletkezett gáz zárt térben lévén, mindig nagyobb nyomást fejtett ki s a nyomás és hűtés combinációja folytán a gáz a cső másik végében folyékonyrá, esetleg szilárdá lett (Phil. Trans. 1823.). Ezen úton a chlort, phosphorhydrogént, aethylént és arzénhydrogént folyadékokká sűrítette, a bromhydrogént, jodhydrogént, kénhydrogént, chlorhydrogént, kéndioxydot, nitrogénoxydult, cyant és ammoniakot szilárd testké fagyasztotta. Másik eljárása az volt, hogy a gőzt egy recipiensben 10 atm. nyomás alá hozta, azután egy másik légszivattyúval 50 atm.-ig nyomta össze s egyúttal lehűtötte. Hűtőszerezül a szilárd szénsav és aether keverékét használta; a szénsav u. i. folyósítva, a hirtelen kiterjedésnél annyira lehül, hogy megfagy.\* Ezen módon hat gáznak kivételével minden gázt folyósított; a nem folyósítható, *permanens* gázok a következők voltak: oxygen, nitrogén, hydrogen, szénoxyd, nitrogénoxyd, methan (mocsárgáz).\*\*

FARADAY-val majdnem egyidőben CAGNIARD DE LA TOUR észlelt

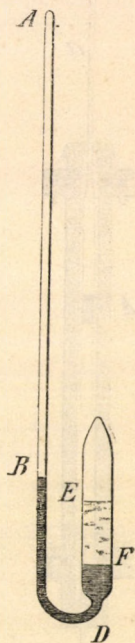
\* THILOIRIER, Ann. ch. ph. LX. 1834.

\*\* Philos. Trans. 1849.



egy sajátosos tünetényt. Az  $AE$  mindkét végén zárt csőben (1. ábra)  $EF$  közt volt a megvizsgálandó folyadék, melyet az  $FDB$  higanyoszlop zárt el az  $AB$ -ben levő levegőtől. Midőn a csövet melegítette, a folyadékból gőzök keletkeztek, melyek a zárt térben nyomást gyakoroltak s a hőmérséklet emelkedésével a nyomás mindig nagyobbodott. A folyadék és gőz között kezdetben éles határ mutatkozott, egy bizonyos hőfoknál azonban a határ eltűnt, a folyadék és gőze egymástól nem volt megkülönböztethető s az egész teret egy ugyanazon halmazállapotban lévő anyag töltötte be. Néhány anyagnál meg is határozta az ezen pontnál felmerült nyomást és hőmérsékletet s azt találta, hogy az átmenet az aethernél  $37-38$  atm. nyomás és  $200^{\circ}$  C. hőmérséklet mellett állott be, alkoholnál a nyomás  $119$  atm., a hőmérséklet  $259^{\circ}$  C., víznél a hőmérséklet körülbelül  $344^{\circ}$  C. Megfigyelte még az e közben fellépő térfogatnagyságobbdást; az aether eredeti térfogatának körülbelül kétszeresére, az alkohol háromszorosára s a víz négyszeresére terjed ki. Kísérleteinél a nyomást az  $AB$  levegőoszlop összenyomódásából határozta meg a BOYLE-MARIOTTE törvény szerint (a gáz térfogata s a reá gyakorolt nyomás egymással fordított arányban vannak), a térfogat meghatározása céljából pedig a csövet pontosan calibrálta. A jelenséget úgy magyarázta, hogy az említett hőfoknál az illető folyadék egy új halmazállapotba (Cagniard de la Tour-féle állapot) megy át.\* Ugyanezen észleletet tette DRION a chloraethylnél s a kéndioxydnál és az átmenet hőmérsékletét az előbbinél  $110^{\circ}$  C-nak, utóbbinál  $240^{\circ}$  C-nak találta.\*\*

Ezen eredmények mindegyike más-más irányban mindenesetre megingathatta a halmazállapotokról elfogadott nézeteket, de ledön-



1. ábra.

\* Ann. ch. ph. (2) XXI, 1822. XXII., XXIII, 1823.

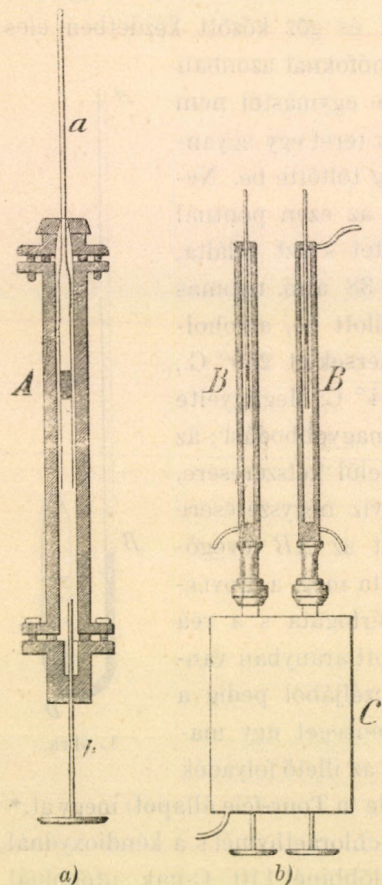
\*\* Ann. ch. ph. (3) LVI. pag. 5; 1859.



teni még nem tudta. Mig azelőtt a gőzök és gázok megkülönböztetésül azon tüneményt tartották, hogy a gőzök folyadékká sűríthetők, a gázok nem, továbbá a gőzök nem követik a BOYLE-MARIOTTE törvényt, a gázok pedig követik, FARADAY kísérletei után már csak

a második ismertető jel maradhatott fenn a gázok és gőzök megkülönböztetésül; még azt is el kellett ismerni, hogy a BOYLE-MARIOTTE törvény itt sem abszolút érvényességű; CAGNIARD kísérletei pedig egy oly halmazállapotváltozásra mutattak, mely az addig ismertek egyikébe sem volt sorolható.

A kétirányú kísérletsorozat eredményeit ANDREWS egyesítette s adta meg egyszersmind a kísérleti alapon nyugvó teljes magyarázatot is. Kísérletéhez a széndioxydot választotta s isothermáinak menetét vette gondos vizsgálat alá. Készülékét a 2. ábra mutatja be; az *a*) készülék *egy* gáz megvizsgálására szolgált, a *b*) készülék pedig *két* gáz együttes megfigyelésére. A készülék leglényegesebb része a pontosan calibrált, felül capillaris, alul kissé kitágult *a* üvegcső volt, melyben a gázt higany-



2. ábra.

csepp zárta el; a gázt gondosan megszárította s a levegőtől lehetőleg megszabadította. A gázzal megtöltött üvegcsövet sárgarézfoglalat segítségével az igen erős *A* sárgarézcsőbe lehetett légmentesen illeszteni; a cső másik végébe ugyanilyen módon egy gondosan elkészített *b* aczélsavar nyúlt be, mely a nyomás kifej-



tésére szolgált. Mielőtt az üvegcsövet felcsavarta, a sárgarézhen-  
gert vízzel töltötte meg. Két gáz egyidejű megvizsgálásánál két  
ilyen készüléket veszünk, melyek egy vízszintes cső által közleked-  
nek egymással.

A kísérletnél a hajszálcsőveket egy-egy derékszögű-hasáb alakú  
*B* sárgarézedény veszi körül, elől és hátul üveglappal ellátva; eze-  
ket állandó hőmérsékletű vízzel töltjük meg. A készülék többi részét  
pedig a *C* sárgarézszekrénybe zárjuk s szobahőmérsékletű vízzel  
töltjük meg. *ANDREWS* kísérleteinél az összetett készüléket hasz-  
nálták; az egyik csövet széndioxydgázzal, a másikat levegővel töl-  
tötte meg. Ez utóbbi összehasonlítás céljából s a nyomások méré-  
sére szolgált, melynél a *BOYLE-MARIOTT* törvénytől való eltérésekre  
nem volt tekintettel. Az isothermák menetét rajzban tüntette fel  
(3. ábra); itt az abszcissák a nyomások, az ordináták a térfogatok.

A kísérletek a széndioxyd isothermáinak menetét  $13.1^{\circ}$ ,  $21.5^{\circ}$ ,  
 $31.1^{\circ}$ ,  $32.5$ ,  $35.5^{\circ}$  és  $48.1^{\circ}$  C. hőmérsékleteknél vizsgálták meg.  
Az első két isothermánál semmi új dolog sem merült fel, a térfogat  
csökkent a nyomás növekedésével, míg a folyósodás pontját el nem  
érte; a folyósodás alatt, eltekintve a széndioxydban maradt levegő  
zavaró hatásától, a térfogat állandó maradt, majd befejeződén a  
folyósodás, a görbe nagyon meredeken haladt tovább. A  $31.1^{\circ}$   
isothermája azonban jelentékeny eltérést ad; a térfogat a nyomás  
növekedésével elegendő szabályossággal csökken, míg a nyomás  
körülbelül 73 atm.-tér el; itt nagy csökkenés áll be, úgy hogy míg a  
nyomás körülbelül 2 atm.-val nő, az alatt a térfogat majdnem felé-  
nyire csökken. A csökkenés azonban nem történik oly hirtelenséggel,  
mint mikor az alacsonyabb hőmérsékleteknél a folyadékképződés  
megkezdődik, hanem a nyomásnak folytonos növelése szükséges,  
hogy a csökkenés végbemenjen. *Ezen folyamat alatt a két halmaz-  
állapotot semmiképen sem lehet egymástól megkülönböztetni.*

Már 1863-ban közölte *ANDREWS* erre vonatkozó, ezzel teljesen  
megegyező észleletét.\* Midőn a széndioxydot pusztán nyomás és a

\* MÜLLER, Chem. Phys. pag. 328. 1863. — Pogg. Ann. Ergzshd. V. pag.  
65; 1871.







A széndioxydra tehát létezik egy oly hőmérséklet, a melyen felül nem vihető át folyós állapotba és a mely hőmérséklet mentén puszta nyomásnövelés által folytonos módon, continuumszerűen, folyadékká sűrithető. Ezt a hőmérsékletet ANDREWS *kritikus hőmérsékletnek* nevezte s megállapította, hogy a nitrogénóxyd, ammoniak, kénaether, széndisulfid is mutatják ezen tulajdonságot s így nagy valószínűség szólott a mellett, hogy minden gáznak megvan ez a tulajdonsága, a mint azt későbbi kísérletek tényleg ki is derítették.

Lássuk már most, hogy ezen felfedezés milyen kiváló fontosságú eredményeket vont maga után.

Mindenekelőtt megadja két, látszólag különböző irányú s lényegében eddig meg nem fejtett jelenségnek egységes magyarázatát. Felvilágosít, hogy a CAGNIARD DE LA TOUR-féle jelenségnél épen a folytonos átmenet processusa folyik le szemünk előtt, a FARADAY-féle kísérletekre nézve pedig megmondja, hogy azokban az u. n. permanens gázoknak folyósítása azért nem sikerült, mert a gázok nem voltak kritikus hőmérsékletük alá hűtve; egyszersmind meg is mutatja az utat, melyet követni kell, hogy a folyósítás sikerüljön.

Másik nagy következménye az volt, hogy a halmazállapotokról alkotott nézetet gyökeresen megváltoztatta. Az addig uralkodott felfogásról már szoltunk (295. lap), lássuk most a dolgot.

Minden légnemű testre nézve van egy olyan hőmérséklet, a kritikus hőmérséklet, melyen felül a testet, bármilyen nagy nyomásnak is vessük alá, folyadékká nem sűrithetjük; az ilyen állapotban levő légnemű testet *gáznak* nevezzük. Ezen a kritikus hőmérsékleten alul a légnemű testet növekedő nyomásnak vetvén alá, ha a nyomás egy bizonyos értéket meghalad, a légnemű test folyadékká sűrűsödik s a nyomás további növelésével egy oly intervallum található, melyben a légnemű test és folyadékja egyszerre foglalnak helyet; ezen légnemű testek a *gőzök*. **Ama bizonyos** nyomás alatt levő gőzt telített gőznek mondjuk s így van egy intervallum, melyben a telített gőz és folyadékja egyszerre vannak jelen.

A kritikus isotherma tehát a választóvonal a légnemű testek két neme közt, de ezen isothermának van egy pontja, a kritikus pont, a melynél a gőz- és a gázállapot egygyé lesznek s a melynél a



folyékony állapotból folytonos átmenet lehetséges a légneműbe és viszont. A gőz tehát nem egyéb, mint a kritikus hőmérséklete alatt levő gáz, illetőleg a gáz kritikus hőmérséklete felett levő gőz; a gáz és a folyadék pedig úgy tekinthetők, mint egy és ugyanazon halmazállapotnak különböző némei, melyek a folytonos változásoknak sorozatai által egymásba átvihetők.

A folyékony és légnemű állapotok összefüggésének kérdése ezzel lényegében el volt intézve, másik feladat merül azonban most fel, melyre ANDREWS is utalt: nincs-e a szilárd és folyékony halmazállapotok között is hasonló folytonos átmenet? Ez a kérdés azonban még messze van a megoldástól; a kevés alapvető dolog, a mit a kutatók ez irányban elértek, a következőkben foglalható össze.

Elméleti okoskodások alapján W. THOMSON bebizonyította, hogy a jég olvadásfoka a nyomással csökken s ezen csökkenés minden atm. nyomás növekedésre  $0.007572^{\circ}$  C. Ezen elméleti eredményt J. THOMSON vizsgálta meg kísérletileg\* OERSTED-féle kompressziós készülékkel. A kísérlet megerősítette az elméleti eredményt, a mennyiben:

8.1 atm. nyomásnál a csökkenés kísérlet szerint	$0.059^{\circ}$ C.
elmélet	« $0.060^{\circ}$ C.
16.8 « « « kísérlet	« $0.129^{\circ}$ C.
elmélet	« $0.125^{\circ}$ C.

Ezen eredményből következik, hogy a jég nagy nyomás alatt jóval  $0^{\circ}$  alatt is folyós maradhat.\*\*

Más testeknél ismét a nyomás növekedése csökkenti az olvadás hőmérsékletét. Kiterjedt kísérleteket végzett ezen viszonyok felderítése végett BUNSEN (1857) igen egyszerű eszközzel. A készülék egy deszkalapra erősített, két teljesen egyenlő alakú és méretű A és B üvegcsőből áll (4. ábra); az egyik edény (A) felülről nyitott, a másik (B) zárt; alsó végén mindkettő zárt. A hőfok megfigyelésére a két cső közé egy hőmérő van erősítve. A két üvegcső alsó részében

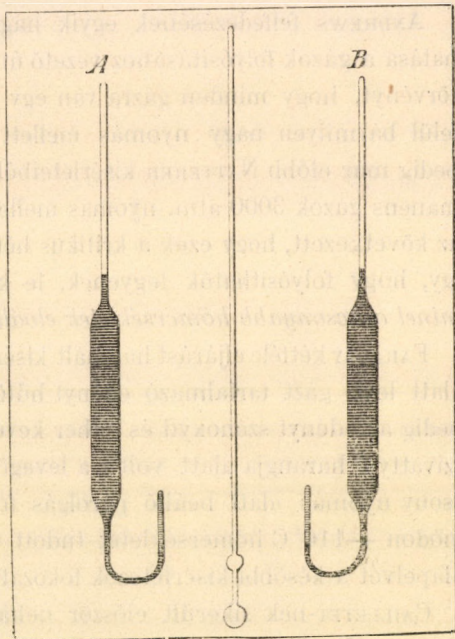
\* Pogg. Ann. LXXXI. pag. 163; 1850. — Phil. Mag. (3) XXXVII. 1850.

\*\* Mousson, Pogg. Ann. CV. pag. 161; 1858.



van a megvizsgálandó anyag, mindkét csőben egyenlő magasságig, e fölött, szintén egyenlő magasságban, higany van. Az eszközt függőleges helyzetben vízfürdőbe meritjük, melynek hőmérséklete valamivel magasabb, mint az illető anyag olvadáspontja; a higany most kiterjed és pedig a nyitott csőben szabadon, a zártban pedig az ott levő anyagra nyomást gyakorolva. Ezen nyomás következtében az anyag olvadáspontjánál magasabb hőmérséklet mellett megfagy; a nyitott csőben levő anyag csak később, mikor a víz a normális olvadáspont hőmérsékletére lehűlt, fagy meg. Ezen kísérletek szerint paraffinnál az olvadás hőfoka 1 atm. nyomás növekvésre  $0.033^{\circ}\text{C}$ -al nő, a csethalzsírnál  $0.021^{\circ}\text{C}$ -al.

Ezen vizsgálatokból kitűnt, hogy azon testeknél, melyek az olvadáskor összehúzódnak, a nyomás növelése csökkenti az olvadás hőmérsékletét; a mely testek pedig az olva-



4. ábra.

dásnál kiterjednek, ott emeli. Ha az olvadásnál megszerkesztjük valamelyik isothermát, megkapjuk a gőzök isothermáihoz analog részeket: midőn a test szilárd, midőn olvad s midőn már megolvadt.

Ha a processust más nyomásoknál végzem, a görbék alakjai arra mutatnak, mintha ott is lenne egy kritikus pont, tehát folytonos átmenet a folyékony állapottól a szilárdba.

Hogy ez a valóságban így van-e, még nem döntötték el. Ezen irányban egyáltalában igen kevés kísérlet történt s így ez a prob-



lema a kísérleti kutatásoknak egyik nagy s mindenesetre igen érdekes feladata marad.

## I. RÉSZ.

### A gázok folyósítása.

#### 1. §. *A gázok folyósítása. Cailletet és Pictet kísérletei.*

ANDREWS felfedezésének egyik nagy s talán legközvetlenebb hatása a gázok folyósításához vezető út kijelölése. Megállapította a törvényt, hogy minden gázra van egy hőmérsékleti határ, melyen felül bármilyen nagy nyomás mellett sem folyósítható, miután pedig már előbb NATTERER kísérleteiből kitűnt,\* hogy az u. n. permanens gázok 3000 atm. nyomás mellett sem folyósíthatók, ebből az következett, hogy ezek a kritikus hőmérsékleten felül vannak s így, hogy folyósíthatók legyenek, le kell hűteni. *A feladat tehát minél alacsonyabb hőmérsékletek előállítására reducálódott.*

FARADAY kétféle eljárást használt kísérleteinél;\*\* a nagy nyomás alatt levő gázt tartalmazó edényt hűtő keverékbe merítette, vagy pedig az edényt szénoxid és æther keverékébe tette, mely egy lég-szivattyú harangja alatt volt s a levegő kiszivattyúzása által alacsony nyomás alatt beálló párolgás folytán erősen lehűlt; ilyen módon  $-110^{\circ}\text{C}$  hőmérsékletet tudott előállítani. Ezen két eljárás alapelvét a későbbi kísérletezők fokozatosan felhasználták.

CAILLETET-nek sikerült először néhány permanens gáz folyósítása.\*\*\* Készülékének főrészt az 5. ábra mutatja keresztmetszetben. A felső végén zárt, alsó végén nyílással ellátott *T* üvegcső a vastagfalú *BB* aczélszögcsőbe volt jól záróan becsavarva. Az aczélszögcső bizonyos magasságig higanynyal volt megtöltve s ugyanezen magasságig megtelt az alsó nyíláson át a *T* cső is, melynek felső részében a megvizsgálandó gáz volt. Kísérletezésnél az üvegcső *O* végét hűtő keverékbe merítette, az *U* nyíláson át vizet szivattyú-

\* Pogg. Ann. LXII. pag. 132; 1844.

\*\* Phil. Trans. 1823; 1849.

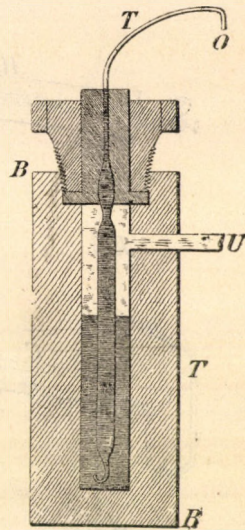
\*\*\* C. R. LXXXV. pag. 851; 1877. — Ann. ch. ph. (5) XV. pag. 138; 1878.



zott az aczélszövegbe s ezáltal a gázra nagy nyomást gyakorolt; a nyomást a szivattyú manometere mérte meg. A gáz *O* cső végében folyósodott meg. Ezen eljárással az acetylént vizsgálta meg.

Kísérleteinél azt tapasztalta még, hogy, ha az acetylén bizonyos hőmérsékleten és nyomáson még nem lett folyóssá, a nyomás hirtelen csökkentésekor a gáz folyós lett. A tünet magyarázata következő: a nyomás hirtelen csökkenésével a gáz hirtelen kiterjedt; mivel a kiterjedéshez szükséges meleget külső melegforrástól nem vonhatta el — *adiabatikus kiterjedés* — azt a maga melegkészségéből kellett elvenni, a minek a következménye volt, hogy erősen lehűlt s így folyós lett. Lényegében ezen módon szilárdította meg THILORIER a folyós szén-savat (296. lap). A kritikus hőmérséklet alá való lehűtést CAILLETET a hűtő keverék s az adiabatikus kiterjedés együttes használatával érte el. Ezen elv alkalmazásával sikerült az *oxygén*, *nitrogén*, *nitrogén-oxydul* és *szén-oxyd* folyósítása. Állítólag a hidrogénnél is észrevette gyöngye köd nyomait.

Ugyanezen időben sikerült ezen gázok folyósítása PICTET-nek\* is, ki a hűtést a hűtőfolyadék alacsony nyomás alatt való elpárologtatásával idézte elő. Az erősfalú *L* recipiensben fejlesztí hevítés által az illető gázt (6. ábra), mely azután az *M* üvegcsövet foglalja el s itt az *M*-et körülvevő *H* csőben levő hűtő folyadék által lehűtetik. A lehűtést következő fokozatokban végzi: *C* csőben folyékony kéndioxyd van, melynek gőzei az *AB* légszivattyú működése folytán *D*-be jutnak, itt condensálódnak s ezután *d*-n át visszajutnak *C*-be. A processus ismétlődése fokozatos lehűlést eredményez, úgy, hogy a kéndioxyd hőmérséklete  $-65^{\circ}$  C-ra, esetleg  $-75^{\circ}$  C-ra is leszáll-

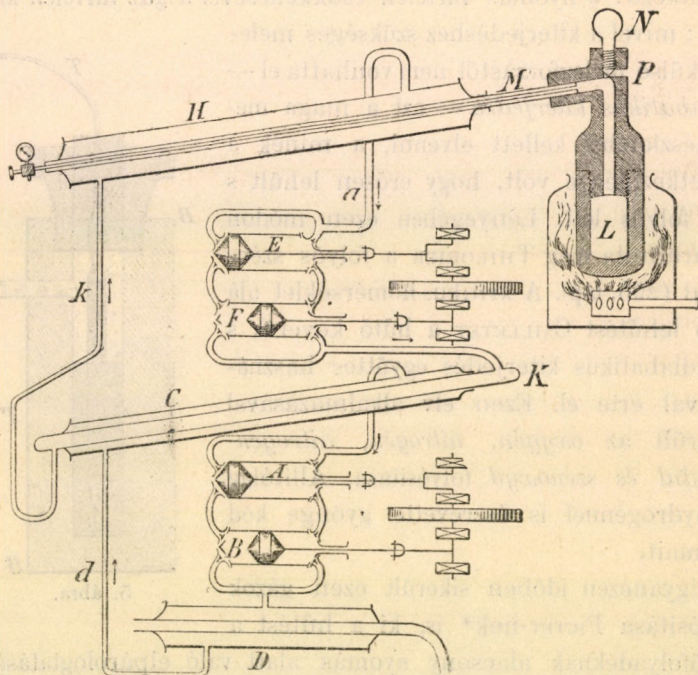


5. ábra.

\* C. R. LXXXV. pag. 214, 1220; 1877. LXXXVI. pag. 37. 106; 1878.



hat. A lehűlt kéndioxydot arra használja fel, hogy a *H*-ban levő folyékony széndioxyd gőzeit, melyek az *EF* szivattyú működése folytán *K*-ba jutnak, ott condensálja, a honnan lehűtve, a *k* csövön visszamennek *H*-ba. Ezen processus eredményeképpen a széndioxyd  $-130^{\circ}$  C-ra lehűlhet s ha széndioxyd helyett nitrogén-oxydult alkalmazott, ez  $-140^{\circ}$  C-ra hűlt le. A mint most *M* cső-



6. ábra.

ben ezen hőmérsékletnek megfelelő nagy nyomás létrejön, a gáz *M*-ben folyóssá lesz.

Ezen az úton az oxygént folyósította és pedig  $-130^{\circ}$  C-nál 273 atm.,  $-140^{\circ}$  C-nál 252 atm. nyomással. Az újabb kutatások szerint ezen adatok magasak. Állítólag a *hydrogén* folyósítása is sikerült; midőn u. i. a hydrogégázt  $-140^{\circ}$  C-re lehűtötte, 150 atm. nyomásnak vetette alá s az *M* csőből a szabad levegőre kibocsájtotta, ezen adiabatikus kiterjedés hatása alatt a hydrogén,



újra nagy mértékben lehűlt s ekkor úgy gondolta, hogy aczélkék színű folyadékot látott.

A hydrogen folyósítására nézve úgy CAILLETET, mint PICTET kísérleti eredményeit a későbbi kutatók kétségbevonták.

Eddig tehát minden kétségen felül az oxygen, nitrogén, nitrogén-oxydul és szénoxyd folyósítása sikerült, CAILLETET-nek csak kőd alakjában, PICTET-nek az oxygen kis mennyiségben és rövid időre.

## 2. §. Az újabb kutatások. Wroblewski, Olszewski és Dewar kísérletei.

WROBLEWSKI és OLSZEWSKI kutatásainak nagy értékét azon körülmény adta meg, hogy a hőmérsékletnek igen nagy leszállításával a permanens gázokat a hydrogen kivételével, mind folyósítani tudták, sőt némelyeket meg is szilárdították; továbbá, hogy nekik sikerült először a folyósított gázokat hosszabb ideig ilyen állapotban tartani.

Az eddig elértéknél is alacsonyabb hőmérsékletek előállítása FARADAY azon eljárásának tökéletesítésével sikerült, mely szerint a hűtő folyadéknak alacsony nyomás alatt történő elpárologtatásával szállítjuk le a hőmérsékletet. Az első kísérleteknél folyékony æthylént használtak s azt találták, hogy, ha az æthylént 25 mm nyomás alatt párologtatják el, a hőmérséklet  $-136^{\circ}\text{C}$ -ra száll le.\* Ily módon az oxygen, nitrogén és szénoxyd folyósítását kísérelték meg; legkönnyebben az oxygen folyósítása sikerült, a másik két gázé nehezebben s ekkor is az állapot csak néhány perczig volt fentartható.

Megkísérelték a hydrogen folyósítását is; a gázt  $-136^{\circ}\text{C}$  hőmérsékletre és 150 atm. nyomás alá hozták s azután a nyomástól hirtelen megszabadították, de nem látták még a CAILLETET-féle kődöt sem.

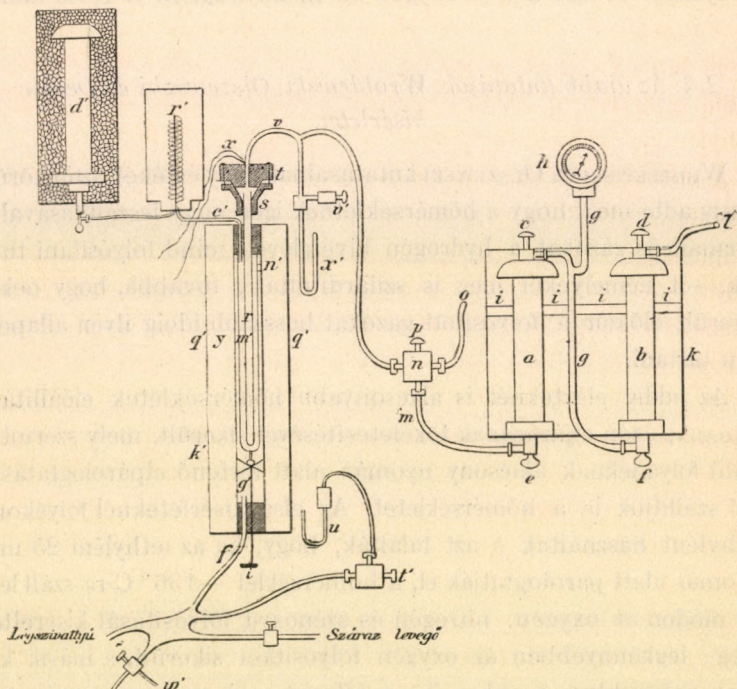
Később WROBLEWSKI-nek sikerült a nyomást a folyékony æthylén fölött 10—9.5 mm-re csökkenteni, miáltal  $-152^{\circ}\text{C}$  hőmér-

\* Wied. Ann. XX. pag. 243; 1883.



sékletet tudott előállítani.\* Kísérletéhez tökéletesebb készüléket szerkesztett (7. ábra).

A gáz  $r$  csőben condensálódott, mely  $s$  sárgaréz foglalatba volt erősítve és  $t$  sárgaréz fűdéssel légmentesen ellátva; a csövet  $m'$  üvegső veszi körül, mely a folyékony æthylén felvételére szolgál s mely körül  $y$  üveghenger van. Hogy  $m'$  és  $y$  felső kaucsukdugója



7. ábra.

közt a zárás teljes legyen,  $m'$ -et  $g'$  dróttal a dugóhoz lehetett szorítani s hogy a drót ne jöhessen ki centrikus helyzetéből, arra szolgált a  $k'$  sárgaréz keresztcske. Hogy az eszközhöz kívülről semmi melegség ne jusson s a hőszugárzás befolyása is eltávolíttassék,  $y$  a  $q'$  keménypapírból készült, két oldalán üveglakkal

\* Wied. Ann. XXV. pag. 371; 1885.



ellátott szekrénybe volt téve. Úgy  $q'$ -ban, mint  $y$ -ban chlorcalcium darabok voltak.

A gázt a folyósításhoz  $k$  czinkedénybe zárt készülékben készítette elő. Ez állott az  $a$  és  $b$  vaspalaczkokból, melyek 150 atm. nyomásig ki voltak próbálva s csapok által egymással és a  $h$  manométerrel közlekedhettek. A nyomás  $a$ -ban kb. 40 atm.,  $b$ -ben 100—120 atm. volt.

A folyékony æthylén két  $d'$  recipiensben volt (a rajzban csak egyik látható), melyek jég és konyhasó keverékében voltak;  $r'$  pedig ætherrel és szilárd széndioxyddal volt megöltve s így az æthylén kétszeres hűtése ment át, mielőtt  $m'$ -be jutott.

A kísérletnél  $t'$  csap alkalmas állításával a folyósítási készülék belsejét összekötjük a külső levegővel, azután az æthylént a két recipiensből egymás után kibocsátjuk; a folyós æthylén  $m'$ -ben gyűlik össze s az æthylén gázak  $n'$ -en,  $f'$ -en és  $t'$ -n át a szabadba jutnak. Ha az æthylén eléggé lehűlt, a mihez oxgénnél kb. 400 gr, nitrogénnél kb. 500 gr æthylén elpárologtatása szükséges,  $d'$ -vel az összeköttetést megszakítjuk,  $a$ -t összekötjük a folyósító készülék belsejével s a gázt ide bocsátjuk; a mily mértékben a gáz  $r$ -ben folyós lesz s a nyomás így  $a$ -ban csökken, engedünk  $b$ -ből  $a$ -ba gázt. A processust akkor szüntetjük meg, ha a folyósított gáz ugyanazon niveaun, vagy valamivel magasabban áll, mint az æthylén.

Hogy a folyós oxgént ily állapotban lehető sokáig megtartsa,  $r$ -be egy másik, alul csúcsban végződő igen vékony falú üvegcsövecskét tett; ez felső végén kis kampóval  $r$  szélére támaszkodott, alul pedig a csúcsán nyugodott és sehol sem érintkezett  $r$  falával. A folyósítás alkalmával a folyós gáz megtölti ezt a csövet s aztán a közte és  $r$  közt levő tért; ha most  $v'$  csapot óvatosan felnyitjuk, előbb a falak közt levő folyadék párolog el, e tér lehül s ez által a tölcserben levő folyadékot izolálja a külső melegítő hatásoktól, úgy hogy a folyós gáz igen lassan párolog most el. Ily módon sikerült az oxgént egy atmosphæra sőt kisebb nyomás alatt is  $\frac{1}{4}$  óráig eltartani. Megjegyzi azonban WROBLEWSKI, hogy a légköri nyomásra való átvitelnél a folyósított gáznak rendesen fele elvész.



Ez eljárással kb.  $145\text{ cm}^3$  folyékony oxigén állítható elő; a légköri nyomásra átvive, mintegy  $7\text{ cm}^3$ .

A folyós oxigén elpárolgatásával még alacsonyabb hőmérsékletet lehetett előállítani. E célból  $v'$  és  $w'$  csapokat — mely utóbbi egy másik légszivattyúval is össze volt kötve — egymással egy tág ólom cső által összekapcsolta,  $o$  légmanometert elzárta s  $w'$  légszivattyúját az æthyléntől elzárta. Így most az első légszivattyú az æthylént, a második a folyósított gázt párologtatja el. Az elért hőmérséklet  $-206^\circ\text{C}$ .

Ezen hűtő eszköz felhasználásával a *nitrogént* és a *szén-oxidot* szilárd állapotban állította elő; a fagyás hőmérséklete és nyomása az elsőnél kb.  $-204^\circ\text{C}$  és  $60\text{--}70\text{ mm}$ , a másodiknál  $-199^\circ\text{C}$  és  $90\text{--}100\text{ mm}$ .

A hőmérsékletet mindig hydrogéntermométerrel és thermoelektromos módon mérte meg; az adatok megegyeztek, kisebb eltérések csak  $-200^\circ\text{C}$  alatt léptek föl.

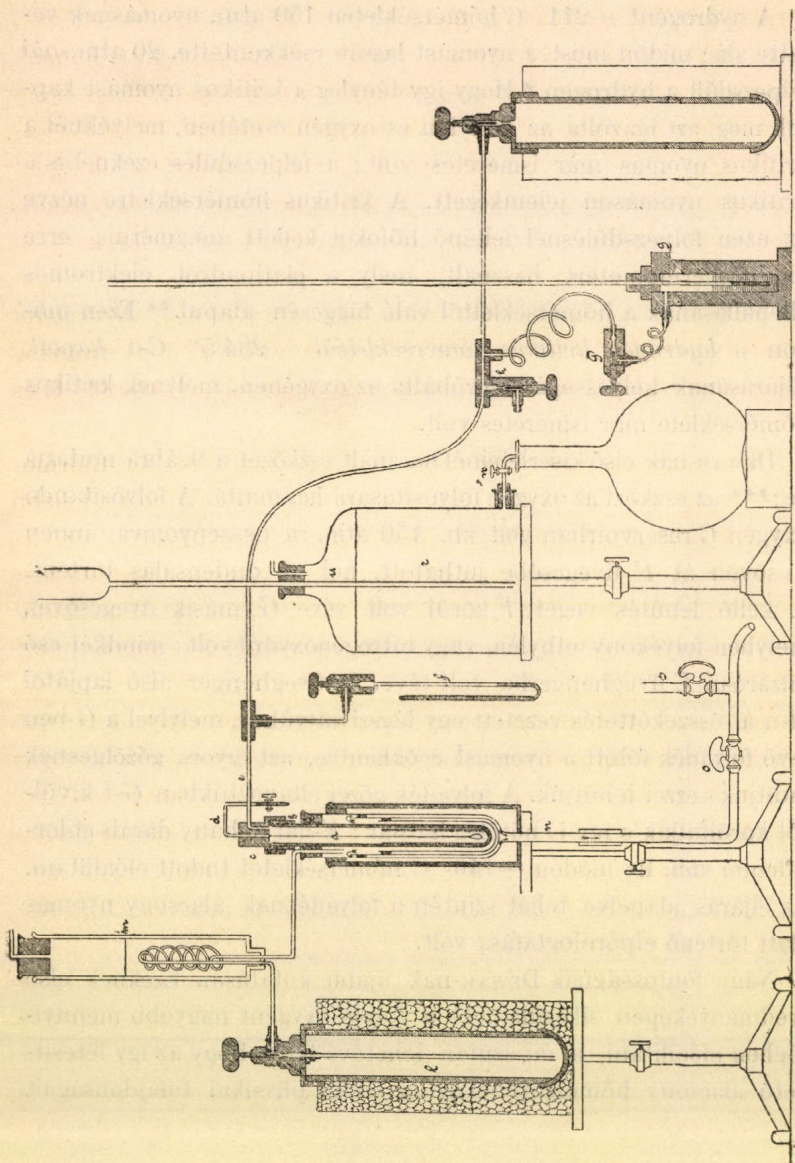
A másik lengyel tudósnek OLSZEWSKI-nek kísérleti berendezése (8. ábra) tulajdonképen a folyósított gázok sűrűségének meghatározására szolgált.\* A folyósításra szolgáló részek lényegben megegyeznek WROBLEWSKI berendezésének megfelelő részeivel, valamint a mód is, melylyel a folyékony gáz fentartásáról gondoskodott. A folyósítás  $a$  üvegesőben történt, mely össze volt kötve  $f$  és  $g$  manométerekkel ( $f$  alacsony,  $g$  magas nyomásra berendezve); a folyósítandó gáz  $i$ -ben volt, a hűtőszer  $l$ -ben. A készülék többi része a sűrűség mérésére való, a miről később szólunk.

Első kísérleteinél hűtőszerül folyékony æthylént használt, melyet alacsony nyomás alatt  $-150^\circ\text{C}$ -nál elpárolgatott; így az oxigént, nitrogént, szén-oxidot, nitrogén-oxidot, methant folyósította. A folyékony oxigénnek hűtő szerül való felhasználásával ugyanezen gázokat — az oxigén kivételével — meg is fagyasztotta; a szilárd nitrogénnek  $4\text{ mm}$  nyomás alatt történő elpárolgatásával pedig  $-225^\circ\text{C}$ -t tudott előállítani.\*\*

\* Wied. Ann. XXXI. pag. 58; 1887.

\*\* Kísérl. eredm. összefoglalása: Phil. Mag. (5) XXXIX. 1895.





8. ábra.



A hydrogén folyósításának kérdését is előbbre vitte OLSZEWSKI.

A hydrogént —  $211^{\circ}\text{C}$  hőmérsékleten 150 atm. nyomásnak vetette alá; midőn most a nyomást lassan csökkentette, 20 atm.-nál felpezsdült a hydrogén.\* Hogy így tényleg a kritikus nyomást kapjuk meg, azt igazolta az æthylén és oxygen esetében, melyeknél a kritikus nyomás már ismeretes volt; a felpezsdülés ezeknél is a kritikus nyomáson jelentkezett. A kritikus hőmérsékletre nézve az ezen fölpezsdülésnél fellépő hőfokot kellett megmérni; erre platinathermometert használt, mely a platinadrót elektromos ellenállásának a hőmérséklettől való függésén alapul.\*\* Ezen módon a *hydrogén kritikus hőmérsékletét* —  $234.5^{\circ}\text{C}$ -t kapott. Eljárásának helyességét kipróbálta az oxygenen, melynek kritikus hőmérséklete már ismeretes volt.

DEWAR-nak első kísérleteinél használt eszközét a 9. ábra mutatja be;\*\*\* az eszközt az oxygen folyósítására használta. A folyósítandó oxygen *C* reservoirban volt kb. 150 atm.-ra összenyomva, innen *I* csövön át *F* üvegcsőbe juthatott, hol a condensálás történt. A kellő lehűtés végett *F* körül volt véve *G* másik üvegcsővel, melyben folyékony æthylén, vagy nitrogénoxid volt; mindkét cső jól záróan *E* üveghengerbe volt téve. Az üveghenger alsó lapjától *H*-n át összeköttetés vezetett egy légszivattyúhoz, melylyel a *G*-ben levő folyadék fölött a nyomást csökkentve, azt gyors gőzölgésnek indítjuk s ezzel lehűtjük. A folyadék gőzei eltávoztukban *G*-t kívülről körülfutják s így is hűtőleg hatnak; *K*-nál néhány darab chlorcalcium van. Ily módon —  $146^{\circ}\text{C}$  hőmérsékletet tudott előállítani. Az eljárás alapelve tehát szintén a folyadéknak alacsony nyomás alatt történő elpárolgatása volt.

Nagy fontosságúak DEWAR-nak újabb kutatásai. Ezeknek első eredményeképen sikerült neki a folyós oxygen nagyobb mennyiségben előállítani, a mi azután lehetővé tette, hogy az így létesíthető alacsony hőmérsékleteknél a testek physikai tulajdonságait

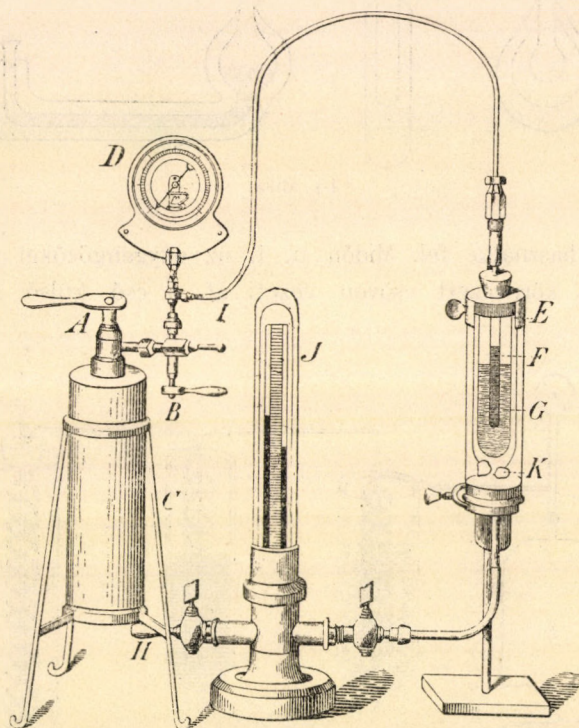
\* Phil. Mag. (5) XXXIX. pag. 199; 1895.

\*\* Wied. Ann. LVI. pag. 132; 1895.

\*\*\* Phil. Mag. (5) XVIII. pag. 210; 1884.



kutassa. Lényeges előhaladás azon eljárása, melylyel lehetővé teszi a folyósított gázoknak hosszabb ideig való megtartását.\* E célból kettős falú üvegedényt készít s a két fal közül a levegőt kiszivattyúzza, miáltal a hővezetés hatását megszünteti. A hőszugárzás hatását úgy compensálja, hogy a légüres térbe kevés higanyt tesz;



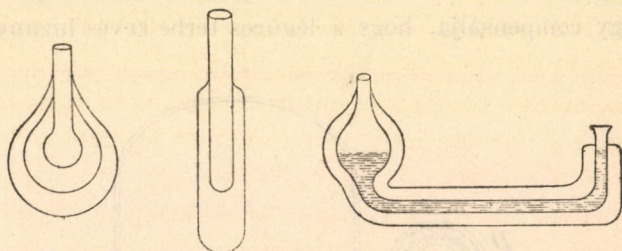
9. ábra.

ha most a folyósított gáz a felső edénybe kerül, az előálló nagy hideg miatt a két edény között fejlődő higanygőzök lecsapódnak a falra s ezen tükröző felületet képeznek. DEWAR szerint a hővesztesség ily edényben csak 4 %-a annak, mely nem higanyozott edényben előfordul. A 10. ábra mutat ilyen vacuumos edényeket.

\* Chem. News LXXI. pag. 192; 1895. — M. Ph. L. IV. pag. 301; 1895.

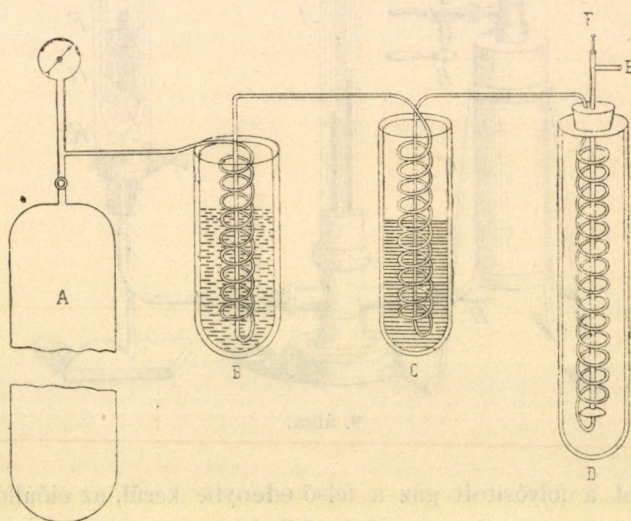


Ezen eszközben a folyósított oxigén nagy mennyiségben eltartható. A folyós oxigént légüres térben elpárolgatva  $-230^{\circ}\text{C}$  hőmérséklet keletkezik; az így párolgó oxigént a levegő folyó-



10. ábra.

ítására használta fel. Midőn u. i. az oxigéngőzőket a légköri levegőtől környezett csövön vezeti át, a cső külső felszínén



11. ábra.

a levegő lecsapodik s az áramlást elég ideig folytatva, a levegő folyadék alakjában gyűlik össze a cső alá tett edényben.

A folyós levegő nagy mennyiségű előállítására és eltartására a vacuumos edényekben lehetővé tette a hidrogén folyósítását



is, mely a kutatásnak annyi ideig ellenállott. A folyósítás a hűtés s az adiabatikus kiterjedés együttes felhasználásával sikerült. Az eszköz (11. ábra) állott az *A* résorvoirból, mely a hydrogengázt tartalmazta, *B*, *C* és *D* kettős falú vacuumos edényekből, melyek közül *B* szénoxydot, *C* folyékony levegőt tartalmazott. A gázalakú hydrogen *A*-ból kiindulva végig haladt *B*-ben, *C*-ben, ez útjában kétszeres lehűlést szenvedve, azután *D*-ben s az *E* nyíláson át kiáramlott. A hydrogént, mely *A*-ban 180 atm. nyomásnak volt alávetve, lehűtötte  $-205^{\circ}\text{C}$ -ra; az így lehűtött gáz folytonosan áramlott *E*-nél egy kettős falú vacuumos edénybe; ebből egy másik ily edénybe, melyet még egy harmadik vacuumos edény vett körül, már folyékony alakban ment át. Ily módon kb. 5 sec. alatt  $20\text{ cm}^3$  folyós hydrogént gyűjtött össze.\*

Ezen nagy kísérleti eredmény a következő lépést már megállapította; a folyós hydrogennek alacsony nyomás alatt történő elpárolgatásával kell a hőmérsékletet csökkenteni. DEWAR-nak ily módon sikerült a *hydrogént* kb.  $-257^{\circ}\text{C}$  hőmérsékleten *szilárd állapotban* előállítani; \*\* a szilárd hydrogennek elpárolgatásával pedig reméli, hogy a hőmérsékletet még  $1-2^{\circ}$ -al leszállíthatja.

A hydrogen folyósításával egyidejűleg a *hélium*-é is sikerült DEWAR-nak. Mikor u. i. egy héliumgázzal töltött üveggömböt folyékony hydrogenbe mártott, a hélium folyadékká sűrűsödött össze.

DEWAR egyéb vizsgálatairól, melyekkel a folyósított gázok tulajdonságait kutatta, továbbá más testek tulajdonságait igen mély hőmérsékleteknél, egyéb helyeken lesz szó.

### 3. §. *Linde és Hampson eljárása.*

Az eddigiekben a lehűtésnek háromféle előnyösen használható módját láttuk; a közvetlen lehűtést az által, hogy a hűtő folyadékot alacsony nyomás alatt elpárolgatjuk; az adiabatikus tágulás

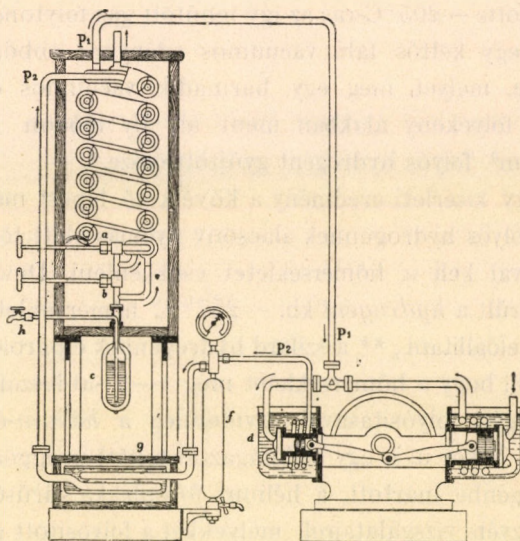
\* Journ. Chem. Soc. LXXIII. pag. 528; 1898. — Naturw. Rundsch. XIII. pag. 301; 1898. — Beibl. XXII. pag. 515; 1898.

\*\* C. R. 1899. szept.



hűtő hatását; PICTET-nek lépcsőzetes hűtési módszerét. LINDE az utóbbi két elvet egyesítette, hogy a folyékony levegőt nagy mennyiségben állítsa elő. Első gépét 1895-ben készítette; \* mi itt a későbbi, tökéletesített szerkezetet ismertetjük. \*\* (12. ábra).

Az atmoszférikus levegő a kettős szivattyú jobboldali szivójánál jön be az *e* vízzel telt hűtő edényen át; a szivattyúban kb. 16 atm. nyomás alá jutva, áthalad a baloldali szivattyúhoz, mely



12. ábra.

200 atm.-ra nyomja össze; innen a *d* vízzel telt hűtő edényen keresztül  $P_2$  csőbe jut s innen a hűtő készülék spirális csöveihez. A lehűtést *e* és *d* edényeken kívül még az is elősegíti, hogy a baloldali szivattyú szívócsövébe folytonosan vizet fecskendezünk; az így nedvessé lett levegőből a víz és vízgőz eltávolítandó, mielőtt a spirális csövekbe jut, mert itt a nagy hideg miatt jéggé fagyyna s

\* Wied. Ann. LVII. pag. 328; 1895. — M. Ph. L. V. pag. 290; 1896.

\*\* SLOANE: Liquid Air; pag. 314; London 1899. — Revue scient. (4) XI. pag. 388; 1899.

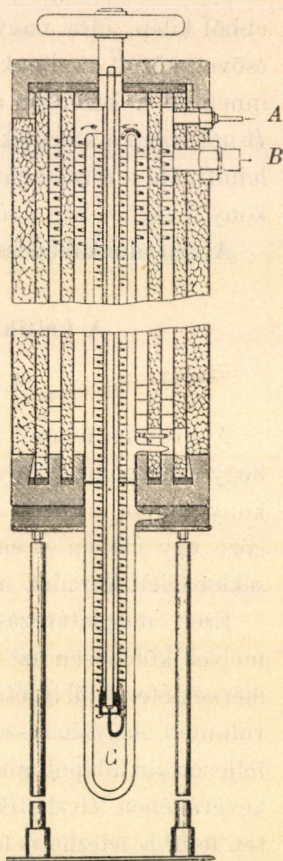


a csövet bedugná; az eltávolítást egyrészt az  $f$ -nél alkalmazott készülék végzi, másrészt pedig az, hogy  $P_2$  a  $g$  hűtő edényen megy át, mely jég és chlorcalcium keverékével van megtöltve s a vizgőzt már itt megfagyasztja.

A spirális hármass koncentrikus csőből áll; a lehűtött levegő  $P_2$ -n át a legbelső csőbe jut s innen  $a$  csapon át  $b$  csaphoz; ez annyira van csak kinyitva, hogy rajta az  $a$ -n kijött levegő  $\frac{1}{5}$  része tud áthatolni, a többi  $\frac{4}{5}$  rész pedig a belső s a középső csövek közötti térben  $P_1$ -n át a szivattyúhoz jut s a processust újra kezdi. A  $b$ -n átjutott levegő a két csapnál kétszeres kitágulást s együttesen lehűlést szenvedett; ha a folyósítás megkezdődik, a folyós levegő  $c$ -vacuumos edényben gyűl össze, a levegő többi része pedig a középső s a külső csövek közötti részen a szabad levegőre jut. Természetesen az  $a$ -tól és  $b$ -től visszatérő levegőrész mindig újra hűti a belső csőben haladó levegőt.

A gép, 3 lóerő fogyasztása mellett, óránként  $1111 \text{ cm}^3$  folyékony levegőt állít elő.

LINDE-től függetlenül körülbelül egy időben HAMPSON is szerkesztett hasonló alapelven folyósító gépet.\* A levegő egy compressorból, melyben legalább 80 atm. nyomás alatt van, az  $A$  csövön át belép a készülékbe (13. ábra); ez egy hármass hengeres edény, melynek falai nem vezető anyaggal vannak kibélelve. A kiterjedés



13. ábra.

\* Nature LIII; pag. 515—516, 1896. Revue scient. (4) XI. pag. 389. — SLOANE: Liquid Air; pag. 320; London, 1899.



következtében lehűlt levegő csavaralakúan haladó csövekben lehalad a külső hengerben, innen bejut a közbensőbe, a hol fölfelé megy, innen pedig a középső hengeren halad lefelé; mikor a végén ebből kilép, újra nagy mértékben kiterjed s lehül. Most pedig a csövek között az ellenkező utat követi: a belső hengerben felhalad, innen le a középsőn át s innen a szélső hengerben felfelé menve *B*-nél kilép a készülékből; ez útjában persze a csöveket erősen lehűti. Ha a folyósodás, elegendő lehűlés után elkezdődik, a folyékony levegő *C*-ben gyűlik össze.

A gép munkaképessége körülbelül egyenlő a LINDE gépével.

### A kritikus állandók meghatározása.

#### 4. §. A kritikus állandók.

A kritikus állapot jellemzésére ANDREWS szerint azt mondtuk, hogy ezen pontnál folytonos átmenet történik a légnemű és folyékony állapot között; a kritikus hőmérsékleten alul a folyadék és gőze egy időben és egy térben előfordulhatnak, míg ezen hőmérséklet felett folyadék nem létezik.

Ezen meghatározás ellen újabban ellenvetések merültek fel, melyek különösen azt vitatták, hogy folyékony állapot a kritikus hőmérsékleten felül is létezhetik. Így RAMSAY azt mondja, hogy az illető volumen nagysága szerint a kritikus hőmérséklet felett az anyag teljesen gáz állapotban, teljesen folyékony állapotban, vagy a kettő keverékében létezhetik.\* JAMIN szerint pedig a kritikus hőmérsékleten felül is létezhetik folyadék, csakhogyyitt nem tud a gáztól különválni és összegyűlni.\*\* Semmi döntő ok nem szól azonban a mellett, hogy eltérjünk ANDREWS felfogásától s a kritikus pontot olyannak tartasuk, melynél a gáz és folyadék egyenlő sűrűségűek, de külön, mint gáz és folyadék léteznek. JAMIN-nak ezen felfogása ellen különben lényeges czáfolatot találunk CAILLETET és COLARDEAU értekezésében;\*\*\* arra utalnak, hogy ezen esetben a hő-

\* Proc. Roy. Soc. XXX; 1880. — C. R. XCVII. pag. 448; 1883.

\*\* C. R. XCVI., pag. 10, 1448; 1883.

\*\*\* Journ. phys. (2) VIII., pag. 389; 1889.



mérséklet emelésekor a sűrűségek változása a kritikus ponton túl is folytatódna s az egész jelenség megfordulna: alul lenne a gáz, felül a folyadék; ezt azonban nem lehet észlelni. Ők más ellenvetéssel állnak elő. Zárt edényben folyékony széndioxydot hevítettek s a telített gőzök nyomását graphikusan ábrázolták; eredményül azt kapták, hogy a görbe a kritikus hőmérsékletig mindig ugyanaz maradt, bármi volt is a folyadék mennyisége, a kritikus ponton felül azonban a nyomásgörbék eltértek egymástól a folyadék mennyisége szerint; ebből azt következtették, hogy a kritikus hőmérsékleten felül is van folyadék. Nem kell azonban elfelejteni, hogy a gáz a kritikus hőmérséklet felett telítetlen állapotban van, mely mindegyik kísérletnél ugyanazon térfogatot foglalja el; ekkor pedig a nyomása attól is függ, hogy mily mennyiség nem telített gőz van a térfogatban.\*

Jogosan fentarthatjuk tehát ANDREWS álláspontját, mely szerint a kritikus hőmérsékleten felül nincs folyadék.

Más fontos kérdés a kritikus pont kísérleti meghatározására vonatkozik. Mi az experimentális ismertető jele annak, hogy ezt a pontot elértük? Ez a kérdés részben összefügg a definitiókkal, melyeket a különböző kutatók a kritikus pontra adtak. Az alapjelenség, mely CAGNIARD DE LA TOUR-t a kritikus állapot felismerésére vezette, a testnek azon állapota volt, melyben a folyadékot határoló meniscus eltűnt, tehát a *folyadék és a gőz egymástól nem voltak megkülönböztethetők*. A meniscus eltűnésének pillanatát figyelték meg tehát. Később JAMIN a kritikus pontot úgy definiálta, hogy ott a *folyadék és a gőz sűrűsége egyenlő* és megmutatta, hogy a sűrűségek egyenlősége a meniscus eltűnésének pillanatában áll be.\*\*

A kérdést újra CAILLETET és COLARDEAU vizsgálták meg.\*\*\* A kritikus pontnak azon hőmérsékletet tekintették, melynél a *folyadék s a gáz egymást kölcsönösen feloldják minden arányban és homogen keveréket alkotnak*. Mindenek előtt igen meggyőző kísérlettel

\* GRÄETZ: Winkelmann Physik II. 2, pag. 660.

\*\* C. R. XCVII. pag. 10; 1883.

\*\*\* Journ. phys. (2) VIII. pag. 389; 1889.



kimutatták, hogy ez a keveredés a meniscus eltűnésének pillanatában még nem áll be. Jódal megfestett széndioxydot hevítettek;  $31^\circ$  körül a meniscus a szokott módon eltűnt, azonban a színezés nem terjedt el az egész edényben; néhány mm-re kiterjedt, de nem jutott el az edény felső részébe, a hol a légnemű test volt. A folyadék tehát a meniscus eltűnése után is megmaradt együtt az edény aljában. A kérdés megvizsgálásánál még azon körülményt is felhasználták, hogy a folyadékban feloldott jód absorptió szinképe más, mint a gázban feloldotté; a spectrum megfigyelése szintén azt mutatta, hogy a folyadék egész tömegében különválva maradt a gáztól, mikor a meniscus eltűnt. JAMIN-nal szemben pedig kimutatták, hogy a meniscus eltűnésekor a sűrűségek még nem egyenlők. Ugyanis *O* alakú üvegeső alsó részébe kéndioxydot tettek s fölötte széndioxidot comprimáltak; a cső egyik szárát lehűtve, bizonyos mennyiségű folyékony széndioxyd képződött s a kéndioxyd egyensúlya a két szárban megbomlott; melegítve az edényt, a széndioxyd meniscusának eltűnésekor a kéndioxydnak mintegy 4 mm maradt a niveau különbsége. Kimondták tehát, hogy a kritikus állapot jellemzőjéül nem lehet a folyadék s a gőz sűrűségének egyenlőségét tekinteni.

Ezen kísérleteket és magyarázatokat megismervén, abban mindenesetre megállapodhatunk, hogy ANDREWS felfogása, mely szerint a kritikus hőmérsékleten felül folyékony test nem létezik, helyes. A másik kérdésre nézve CAILLETET és COLARDEAU kísérleteivel szemben is azt a pontot választhatjuk kritikus pontnak, melynél a folyadék s a gáz sűrűsége egyenlő; erre nézve utalunk AMAGAT-nak,\* MATHIAS-nak\*\* és RAMSAY-nek\*\*\* vizsgálódásaira, melyek szerint a kétféle sűrűség a kritikus ponton tényleg egyenlő lesz. Mint valószínű dologról szólhatunk, hogy a CAILLETET-COLARDEAU s a JAMIN-féle meghatározások egybeesnek, azaz, a mely ponton a folya-

\* Journ. phys. (3) I. pag. 288; 1892. — M. Ph. L. III. pag. 378; 1894.

\*\* Journ. phys. (3) II. pag. 1; 1893. — M. Ph. L. III. pag. 378; 1894.

\*\*\* Zeitschr. f. phys. Chem. XIV. pag. 486; 1894. — Beibl. XIX. pag. 46; 1895.



dék s a gáz tetszőleges arányú keveredése bekövetkezik s homogén keverék képződik, ott egyenlő a kétféle sűrűség is.

A kritikus hőmérsékleten felül tehát folyadék és gőze nem lehetnek egyszerre jelen, a gőz tehát nem lehet telített; így mondhatjuk, hogy a *kritikus nyomás a telített gőz maximális nyomása*.

Mivel a kritikus hőmérséklet és a kritikus nyomás minden testre nézve jellemző állandó mennyiségek, ezeket *kritikus állandók*-nak nevezték el. A kritikus állandókhoz sorolják még a kritikus sűrűséget és kritikus térfogatot is; *kritikus sűrűség a telített gőz maximális sűrűsége, kritikus térfogat a telített gőz fajlagos térfogatának minimális értéke*.

Ezen kritikus állandók közül legközvetlenebbül a kritikus hőmérséklet ismerete érdekel s a kísérletek első sorban ennek meghatározására szoktak irányulni. A pontos meghatározás nehéz feladat; a többi állandóknál még nehezebb. A kritikus nyomás meghatározását megnehezíti azon körülmény, hogy nagyobb nyomások mérésénél pontosan számba kell venni a BOYLE-MARIOTTE törvénytől való eltérést; továbbá a gőztérnek teljesen légüresnek kell lennie. A kritikus sűrűség és térfogat pontos meghatározásának nagy nehézsége pedig abban áll, hogy a kritikus hőmérséklet közelében a gőznek s a folyadéknak fajlagos térfogatai igen gyorsan változnak. Ezen okok miatt az egyes kísérleti eredmények között néha nagy eltérések vannak.

A következőkben megismertetjük a kritikus állandók meghatározására szolgáló fontosabb módszerek alapelveit. A kritikus állandókra kimerítő táblázatok találhatók: M. Ph. L. I. pag. 277; 1892. Zeitschr. f. phys. Chem. VII. — Winkelmann, Phys. II. 2. pag. 673.

### 5. §. Cagniard de la Tour és Andrews módszerei.

Ismételten említettük, hogy CAGNIARD DE LA TOUR a meniscus eltűnésének pillanatában fellépő nyomást és hőmérsékletet tekintette kritikus nyomásnak és hőmérsékletnek. WROBLEWSKI így mérte meg a nitrogén, szénnoxid, oxigén, levegő kritikus hőmérsékletét és nyomását. A gázt folyósították, azután pedig a nyomást



igen lassan csökkentve, megfigyelték az időpontot, mikor a meniscus előtűnt; a kísérleti berendezést már ismertettük (308. lap, 7. ábra). Az eredmények, ha  $\vartheta$  a kritikus hőmérséklet,  $\pi$  a kritikus nyomás:

nitrogén:  $\vartheta = -146.35^\circ \text{ C}, \pi = 32.08 \text{ atm.}$

szénoxyd:  $\vartheta = -141.1^\circ \text{ C}, \pi = 34.90 \text{ „}$

oxygén:  $\vartheta = -118.0^\circ \text{ C}, \pi = 50.00 \text{ „}$

levegő:  $\vartheta = \text{kb.} -142.0^\circ \text{ C}, \pi = 37.80 \text{ „}$

Említettük már, az eljárás ellen emelt kifogásokat (319. lap); még az is kérdésessé vált, vajjon a meniscus eltűnése nem függ-e a folyadék a és gőz térfogatainak kezdeti viszonyától; tehát, hogy az ilyen módon meghatározott kritikus hőmérséklet és nyomás állandó-e ugyanazon testnél?\*

ANDREWS eljárásának alapelve: kutatni kell azon határ-isothermát, melynek mentén a folytonos átmenet beáll s meg kell mérni az ekkor keletkező nyomást; vagy geometrice: meg kell állapítani azon isothermát, melynek egyenes vonalú része eltűnik s meg kell ennek inflexió pontját határozni. Ezen eljárás exactság tekintetében talán első helyen áll valamennyi mód között, eredményei is a legpontosabbak; egyedüli nehezítő körülménye, hogy a kritikus pont szomszédságában már igen kicsiny az isotherma egyenesvonalú része s így nehéz megállapítani, hogy mikor tűnik el egészen? Az eljárást különösen RAMSAY és YOUNG használták\*\* és BATTELLI\*\*\* A methodus a kritikus sűrűséget és térfogatot is megadja.

#### 6. §. *Amagat és Nadejdine módszere.*

Közvetetlenül a sűrűségek meghatározását végzi AMAGAT eljárása, melynek érvényességét azután MATHIAS mutatta ki nagyobb körre nézve. Elzárt, calibrált üvegcsőben hevítve a folyadékot, ha a

\* PELLAT M. Ph. L. III. pag. 373; 1894.

\*\* Phil. Trans. 1886, 1887, 1889.

\*\*\* Mem. Acc. Torino (2) XL, XLI, XLIV.



folyadék kezdeti tömege  $m$ , a hevítés valamelyik stádiumában a folyadék térfogata  $v$ , sűrűsége  $d$ , a telített gőzre nézve az adatok  $v_1$  és  $d_1$  akkor:

$$m = vd + v_1 d_1;$$

ha most a hőmérsékletet állandóan tartva, a nyomást növeljük, akkor a gőz térfogata  $\Delta v_1$ -el csökken, a folyadéké  $\Delta v$ -vel nő és fennáll a következő összefüggés:

$$d \Delta v = d_1 \Delta v_1.$$

Ezen két egyenletből:

$$\text{a folyadék sűrűsége } d = \frac{m \Delta v_1}{v \Delta v_1 + v_1 \Delta v},$$

$$\text{a telített gőz sűrűsége } d_1 = \frac{m \Delta v}{v \Delta v_1 + v_1 \Delta v}.$$

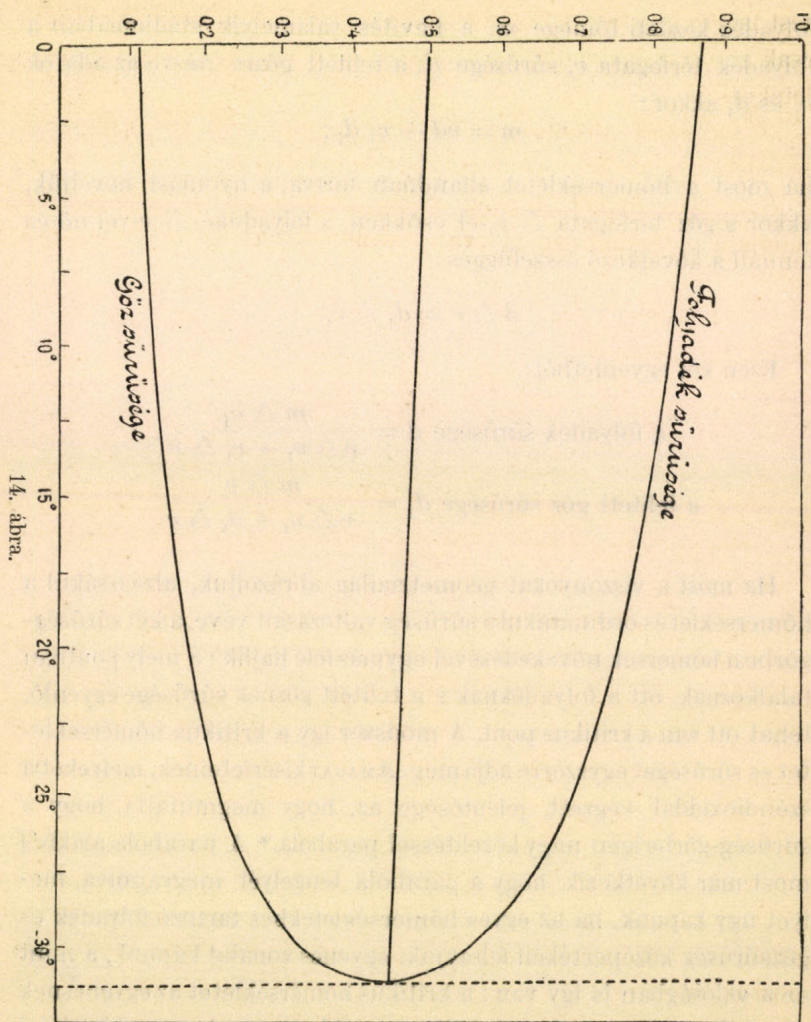
Ha most a viszonyokat geometriailag ábrázoljuk, abszcissácul a hőmérséklet és ordinátácul a sűrűség változásait véve, a két sűrűség-görbe a hőmérsék növekedésével egymás felé hajlik; a mely pontban találkoznak, ott a folyadéknak s a telített gőznek sűrűsége egyenlő, tehát ott van a kritikus pont. A módszer így a kritikus hőmérsékletet és sűrűséget egyszerre adja meg. AMAGAT kísérleteinek, melyeket a széndioxiddal végzett, jelentősége az, hogy megmutatta, hogy a sűrűség-görbe igen nagy közelítéssel parabola.\* A parabola alakból most már következik, hogy a parabola tengelyét megrajzolva, melyet úgy kapunk, ha az egyes hőmérsékletekhez tartozó folyadék és gőzsűrűség középértékéit felrakjuk, egyenes vonalat kapunk, a mint az a valóságban is így van; a kritikus hőmérsékletet az egyenesnek s a görbének metszéspontja adja meg (14. ábra). AMAGAT kísérletei szerint a parabola tengelynek igen kicsi a hajlása a hőmérsékletek tengelyéhez, tehát a közepsűrűség a hőmérséklettel csak igen keveset változik.

MATHIAS a kérdést több anyagon megvizsgálta.\*\* Felhasználta

\* Journ. phys. (3) I. pag. 288; 1892. — M. Ph. L. III. pag. 378; 1894.

\*\* Journ. phys. (3) II. pag. 1; 1893. — M. Ph. L. III. pag. 378; 1894.





14. ábra.

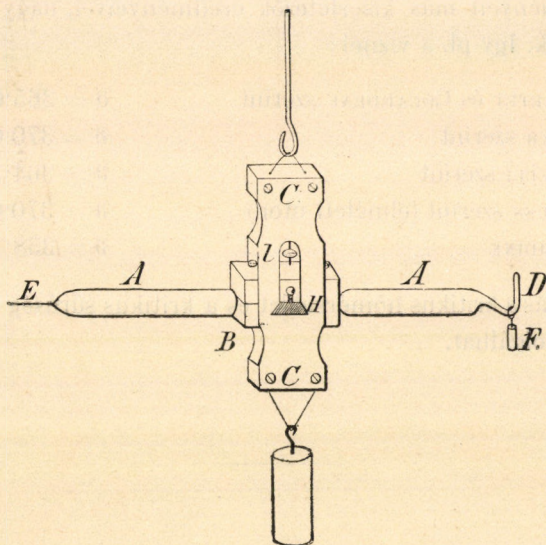
Young észleléseit; \* tetszőleges két kísérleti adatból meghatározta a közepsűrűséget e két helyen, ebből a tengelyt megszerkesztette, a többi hőmérsékletnél azután összehasonlította a közepsűrűségnek a rajzból s Young kísérleteiből adódó értékeit. Igen nagy megegye-

\* Phil. Mag. (5) XXXIV. pag. 503, 507; 1890.



zést talált; az eltérés általában  $0.04$  volt,  $2\%$ -nál nagyobb eltérés csak az alkoholnál mutatkozott a kritikustól messze levő hőmérsékleteknél. —

A sűrűségek egyenlőségének elvén alapul NADEJDINE eljárása is, melylyel szerinte  $0.5^\circ$  pontosságot lehet elérni. Az eszköz (15. ábra) a  $B$  tartóba foglalt  $A$  üveg- vagy vascsőből áll;  $B$  tartó mérleg módjára mozoghatólag alá van támasztva s az egészet  $C$  foglalat



15. ábra.

segélyével felfüggeszthetjük. A csövet üres állapotban egyensúlyba hozzuk, azután részben megtöltjük a megvizsgálandó folyadékkal s hevítjük. A folyadékból gőz fejlődik s az egyensúly felbomlik; a mint azonban a hőmérséklet a kritikus fokig emelkedett, a folyadéknak s telített gőzének sűrűsége egyenlő lesz, az egész teret egyenletes halmazállapotú test tölti meg s az egyensúly helyre áll. Természetesen, ha kevés volt a kezdeti folyadék, elgőzölöghet a kritikus hőmérséklet alatt, ha pedig sok, akkor az egész csövet megtölti, mielőtt elérte volna a kritikus hőmérsékletet; mindkét esetben hamarabb beáll az egyensúlyi helyzet. Hogy ezen hiba



elkerültessék, ugyanazon anyagból különböző mennyiségeket vett s kritikusnak a legmagasabb megfigyelt hőmérsékletet vette, melynél az egyensúly beállott.

Mivel itt az anyagot nem kell látni, vascső is használható s az eljárás így különösen oly anyagoknál, melyek az üveget megtámadják, alkalmazható. Az egyensúlyi helyzet pontos megállapítása tűkőrrapparatussal történhetik. NADEJDINE, mint említettük, az eredményeket  $0.5^\circ$  pontosságúaknak tartja; azonban összehasonlítva eredményeit más kísérletezők eredményeivel, nagy eltéréseket találunk. Így pl. a víznél:

CAILLETET és COLARDEAU szerint	$\vartheta = 365.0^\circ C$
DEWAR szerint	$\vartheta = 370.0^\circ C$
BATTELLI szerint	$\vartheta = 364.3^\circ C$
STRAUSS szerint (elméleti úton)	$\vartheta = 370.0^\circ C$
NADEJDINE	$\vartheta = 358.1^\circ C$

Az eljárás a kritikus hőmérséklet és a kritikus sűrűség meghatározására szolgálhat.





## DESMIKUS RENDSZEREK.

STEPHANOS CYPARISSOS három tetraédert, melynek élei egymást hármásával tizenkét pontban metszik, desmikus helyzetű tetraéderrendszernek, és azt a három tetraédert, melynek szögpontjai amazok éleinek metszéspontjai, az előbbihez konjugált desmikus tetraéderrendszernek nevezett.\* E hat tetraéder akkép egészíthető ki STEPHANOS szerint kilencz új tetraéderrel, hogy a tizenöt tetraéder tíz konjugált desmikus rendszerre bontható, melyek közül bármelyik a többit egyféleképp határozza meg. Ily tizenöt tetraédert egy *teljes* desmikus tetraéderrendszernek lehet nevezni.

STEPHANOS szerint minden desmikus tetraéderrendszer egy egyágú hiperboloidot határoz meg, melyre vonatkozólag ama rendszernek és a hozzá konjugált rendszernek tetraéderei polártetraéderek. A teljes desmikus tetraéderrendszer tíz ily egyágú hiperboloidhoz vezet, melyet már egy egyszerű desmikus rendszer is meghatároz, és melyet egy *teljes* desmikus hiperboloidrendszernek lehet nevezni.

Egy desmikus rendszerhez tartozó két hiperboloid egymást egy négyszög szerint metszi és négyféleképp centrumosan involúciós fekvésű.  $\infty^2$  számú hiperboloid van, mely ama kettőt egy-egy négyszög szerint metszi és így azokat egy *egyszerű* desmikus hiperboloid rendszerre egészíti ki. A teljes desmikus rendszert képező tíz hiperboloid bármelyikét a többi kilencz ugyanennyi négyszögben metszi. Együttvéve e metszési négyszögek száma negyvenöt;

---

\* «Sur les systèmes desmiques de trois tétraèdres». *Bulletin des sciences mathématiques*. 1879.



a desmikus hiperboloidrendszerrel kapcsolatos desmikus tetraéderrendszernek élei képezik ezeknek oldalait.

A teljes desmikus hiperboloidrendszernek és a vele kapcsolatos teljes desmikus tetraéderrendszernek síkmetszése egy teljes desmikus kúpszelet- és négyoldalrendszer. Az egyszerű desmikus négyoldalrendszer oly három négyoldalból áll, melynek oldalai egymást tizenhat pontban metszik; az egyszerű desmikus kúpszeletrendszer pedig, mely szintén három kúpszeletből áll oly tulajdonságú, hogy mindegyik kúpszelet a másik kettőtől négy pontpárban metszetik, melyek közül két pár és a másik két pár egymást harmonikusan elválasztja.

Az alakzatban, mint azt STEPHANOS is észrevette, következő négy konfiguráció  $(30_6, 60_3)$ ,  $(60_3, 30_6)$ ,  $(320_3, 60_{16})$ ,  $(60_{16}, 320_3)$  fordul elő, melyek közül a két első és a két utóbbi egymásnak duálisan megfelelő alakzatai. Az első alakzat áll 30 egyenesből és 60 pontból, a második 60 síkból és 30 egyenesből, a harmadik 320 egyenesből és 60 pontból, a negyedik 60 síkból és 320 egyenesből.

A következőkben e rendszereknek újabb és könnyen áttekinthető valamint teljesebb tárgyalását vagyok bátor bemutatni.

## 1. A teljes desmikus tetraéder- és négyoldalrendszer.

1. Jelöljük egy desmikus tetraéderrendszernek tetraédereit  $A$ ,  $B$ ,  $C$ -vel; azoknak szögpontjait

$$A_1 A_2 A_3 A_4, \quad B_1 B_2 B_3 B_4, \quad C_1 C_2 C_3 C_4$$

gyel; az  $ABC$  rendszerhez,  $R$ -hez, konjugált desmikus tetraéderrendszernek,  $R_t$ -nek, tetraédereit  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$ -gyel, végre az utóbbi tetraéderek szögpontjait

$$E_{12} F_{12} E_{34} F_{34}, \quad E_{13} F_{13} E_{42} F_{42}, \quad E_{14} F_{14} E_{23} F_{23}$$

mal.

A konjugált desmikus tetraéderrendszerpár meg van határozva,



ha az  $A$  tetraédernek mind a négy szögpontját, a  $B$  tetraédernek pedig egyik, pl. a  $B_1$  szögpontját tetszés szerint vesszük fel, a nélkül, hogy  $B_1$  az  $A$  tetraéder valamelyik lapjában feküdnék.

Az  $A_i A_j$  élnek és a vele szemben fekvő élnek — mely két élet élpárnak akarunk nevezni — a  $B_1$  ponton keresztül menő szelője az  $A_i A_j$  élet az  $E_{ij}$  pontban metszi. Az  $E_{ij}$ ,  $F_{ij}$  pontok az  $A_i$ ,  $A_j$  pontokat, az  $E_{1i}$ ,  $E_{jk}$  pontok a  $B_1$ ,  $B_i$  pontokat, végre az  $F_{1i}$ ,  $F_{jk}$  pontok a  $B_j$ ,  $B_k$  pontokat harmonikusan választják el. A  $C_i$  pontok a  $B_1$  pontot az  $A$  tetraéder  $A_i$  szögpontjától és az ezzel szemben fekvő  $a_i$  laptól, és így az  $E_{1i}$ ,  $F_{jk}$  pontok a  $C_i$ ,  $C_k$  pontokat, az  $E_{jk}$ ,  $F_{1i}$  pontok pedig a  $C_1$ ,  $C_i$  pontokat szintén harmonikusan választják el.

E szerint az

$$\begin{array}{lll} A_1 E_{1i} A_i F_{1i}, & B_1 E_{jk} B_i E_{1i}, & C_1 F_{1i} C_i E_{jk} \\ A_j E_{jk} A_k F_{jk}, & B_j F_{1i} B_k F_{jk}, & C_j E_{1i} C_k F_{jk} \end{array}$$

pontnégyesek mind harmonikusak.

E négyesekből következik, tekintettel arra, hogy az  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  és az  $E_{1i} F_{1i} E_{jk} F_{jk}$  pontok tetraédereknek szögpontjai, tehát nem fekszenek ugyanegy síkban, hogy az

$$\begin{array}{llll} A_1 B_1 C_1 & A_1 B_2 C_2 & A_1 B_3 C_3 & A_1 B_4 C_4 \\ A_2 B_1 C_2 & A_2 B_2 C_1 & A_2 B_3 C_4 & A_2 B_4 C_3 \\ A_3 B_1 C_3 & A_3 B_2 C_4 & A_3 B_3 C_1 & A_3 B_4 C_2 \\ A_4 B_1 C_4 & A_4 B_2 C_3 & A_4 B_3 C_2 & A_4 B_4 C_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} F_{34} F_{24} F_{23} & F_{34} E_{23} E_{24} & F_{24} E_{23} E_{34} & F_{23} E_{34} E_{24} \\ F_{34} F_{13} F_{14} & F_{34} E_{14} E_{13} & F_{13} E_{14} E_{34} & F_{14} E_{34} E_{13} \\ F_{12} F_{24} F_{14} & F_{12} E_{14} E_{24} & F_{24} E_{14} E_{12} & F_{14} E_{12} E_{24} \\ F_{12} F_{13} F_{23} & F_{12} E_{23} E_{13} & F_{13} E_{23} E_{12} & F_{23} E_{12} E_{13} \end{array}$$

pontok egy-egy egyenesen fekszenek.

2. Az  $A$  tetraédernek  $A_1 A_i$ ,  $A_j A_k$  élpárján az  $A_1 A_i$ ,  $E_{1i} F_{1i}$  és az  $A_j A_k$ ,  $F_{jk} F_{jk}$  pontpárok egy involucziót határoznak meg, melyeknek kettőspontjai konjugált-képzeteseek.

Hogy a két képzetes kettőspontot egymástól megkülönböztess-



sűk, STAUDT \* szerint az éleken fekvő pontok sorozatának értelmet kell tulajdonítanunk. Legyen tehát az egyik képzetes pont

$$A_{1i} \text{ az a pont, mely az } A_1 E_{1i} A_i F_{1i} \text{ értelemhez tartozik}$$

$$A_{jk} \quad " \quad " \quad A_j E_{jk} A_k F_{jk} \quad " \quad "$$

és így a másik két kettőspont  $A_{i1}$ ,  $A_{kj}$  az a pont, mely az  $A_i E_{1i} A_1 F_{1i}$ , ill. az  $A_k E_{jk} A_j F_{jk}$  értelemhez tartozik.

Ugyanígy a  $B$  és  $C$  tetraédereknek  $B_1 B_i$ ,  $B_j B_k$  és  $C_1 C_i$ ,  $C_j C_k$  élpárjain a

$$B_1 B_i \cdot E_{1i} E_{jk}, \quad B_j B_k \cdot F_{1i} F_{jk}$$

$$C_1 C_i \cdot F_{1i} E_{jk}, \quad C_j C_k \cdot E_{1i} F_{jk}$$

társpontok egy-egy involucziót határoznak meg. Ezeknek képzetes kettőspontjai közül tartozzék

$$B_{1i} \text{ a } B_1 E_{jk} B_i E_{1i} \text{ értelemhez,} \quad B_{jk} \text{ a } B_j F_{1i} B_k F_{jk} \text{ értelemhez}$$

$$C_{1i} \text{ " } C_1 F_{1i} C_i E_{jk} \quad " \quad C_{jk} \text{ " } C_j E_{1i} C_k F_{jk} \quad "$$

és így az ezekhez konjugált kettőspontok  $B_{i1}$ ,  $B_{kj}$ ,  $C_{i1}$ ,  $C_{kj}$  az ellenkező értelemhez.

Ama kettőspontokat még azzal az értelemmel is jelölhetjük, a mely hozzájuk tartozik, tehát:

$$A_{1i} = A_1 E_{1i} A_i F_{1i}, \quad B_{1i} = B_1 E_{jk} B_i E_{1i}, \quad C_{1i} = C_1 F_{1i} C_i E_{jk},$$

$$A_{jk} = A_j E_{jk} A_k F_{jk}, \quad B_{jk} = B_j F_{1i} B_k F_{jk}, \quad C_{jk} = C_j E_{1i} C_k F_{jk},$$

a miből természetesen következik, még  $A_{1i} = A_i F_{1i} A_1 E_{1i}$ , stb.,  $A_{i1} = A_i E_{1i} A_1 F_{1i} = A_1 F_{1i} A_i E_{1i}$ , stb.

Az  $R \equiv ABC$  tetraédereknek 18 éle lévén, a talált képzetes kettőspontoknak száma 36. Ezeket általában  $I$  (imaginarius) pontoknak, vagy ha konjugáltakról van szó  $I$  pontpáraknak, ellenben az  $R$  és  $R_t$  tetraédereknek 24 valós szögpontját általában  $R$  (valós) pontoknak akarjuk nevezni.

Az  $R$  tetraéderek bármelyik éle, az  $R$  és az  $R_t$  tetraédereknek egy-egy szögpontpárját és egy  $I$  pontpárt tart; ezek közül bármely-

\* STAUDT: Beiträge zur Geometrie der Lage. I. kötet, 76. oldal, 7. §.: Imaginäre Elemente.



lyik a másik kettőt harmonikusan választja el. Hat pont egy egyenesen vagy egy kúpszeleten, mely akkép bontható három pont-párra, hogy mindegyik pár a másik kettőt harmonikusan választja el, hatféleképp képez involúciót. Ilyen hat pontot nyerünk pl. egy kúpszeleten, ha azt egy polárháromszög oldalaival a  $PQ$ ,  $P_1Q_1$ ,  $P_2Q_2$  pontpárakban metszük; a hat involúcióban a társponatok:

$$\begin{array}{ll} P_1P_2 \cdot Q_1Q_2 \cdot PQ & P_1Q_2 \cdot P_2Q_1 \cdot PQ \\ P_2P \cdot Q_2Q \cdot P_1Q_1 & P_2Q \cdot PQ_2 \cdot P_1Q_1 \\ PP_1 \cdot QQ_1 \cdot P_2Q_2 & PQ_1 \cdot P_1Q \cdot P_2Q_2. \end{array}$$

A szerint a mint a kúpszelet valós vagy képzetes: a hat pont közül kettő vagy valamennyi képzetes lesz.

3. A 24  $R$  pont bármelyikéből hat oly konjugált képzetes egyenespár sugárzik ki, mely a 36  $I$  pont közül két konjugált pontpárt tart. Még pedig kisugárzanak

$$\begin{array}{ll} \text{az } A_1\text{-ből a } B_{1i}C_{i1}, B_{jk}C_{jk} \\ \text{a } B_1 \text{ " } C_{1i}A_{i1}, C_{jk}A_{jk} \\ \text{" } C_1 \text{ " } A_{1i}B_{i1}, A_{jk}B_{jk} \\ \text{az } A_i \text{ " } B_{1j}C_{ki}, B_{ik}C_{1j}, B_{1i}C_{1i}, B_{jk}C_{kj} \\ \text{a } B_i \text{ " } C_{1j}A_{ki}, C_{ik}A_{1j}, C_{1i}A_{1i}, C_{jk}A_{kj} \\ \text{" } C_i \text{ " } A_{1j}B_{ki}, A_{ik}B_{1j}, A_{1i}B_{1i}, A_{jk}B_{kj} \\ \text{az } E_{1i} \text{ " } A_{1j}A_{ji}, B_{1j}B_{ji}, C_{1j}C_{k1}, C_{ji}C_{ik} \\ \text{" } E_{ij} \text{ " } A_{1k}A_{kj}, A_{1i}A_{j1}, B_{1i}B_{ik}, C_{1i}C_{ki} \\ \text{" } F_{1i} \text{ " } A_{1j}A_{ij}, B_{1j}B_{k1}, B_{ji}B_{ik}, C_{1j}C_{ji} \\ \text{" } F_{ij} \text{ " } \begin{cases} A_{1i}A_{1j}, B_{1i}B_{1j}, C_{1i}C_{1j} \\ A_{ki}A_{kj}, B_{ki}B_{kj}, C_{ki}C_{kj} \end{cases} \end{array}$$

egyenesek és a hozzájuk konjugált egyenesek.

Igy pl. a

$$\begin{array}{l} B_{1i} = B_1E_{jk}B_iE_{1i} \\ C_{i1} = C_1E_{jk}C_iF_{1i} \end{array}$$

pontokat és az ezekhez konjugált pontokat összekötő konjugált egyenespárok a  $B_1C_1$ ,  $B_iC_i$ ,  $E_{1i}F_{1i}$  valós egyeneseknek  $A_1$  metszéspontján mennek keresztül.

Vagy pl. a



$$C_{ki} = C_k E_{ij} C_i F_{ki}$$

$$C_{kj} = C_k E_{1i} C_j F_{kj}$$

pontokon és az ezekkel konjugált pontokon keresztülmenő konjugált képzetes egyenespárnak valós metszéspontja  $F_{ij}$ , az  $E_{1j}E_{1i}$ ,  $C_i C_j$ ,  $F_{ki} F_{kj}$  valós egyeneseken van.

4. Az  $R$  és  $R_t$  tetraéderek bármelyikének valamely élpárján fekvő  $I$  pontpárok egy képzetes tetraedernek szögpontjai. Összesen van tehát 9 ily képzetes tetraéder  $I$ , melyeknek szögpontjait a 36  $I$  pont képezi.

E 9  $I$  tetraédert következőképen akarjuk jelölni:

$$I_2^a = A_{12} A_{21} A_{34} A_{43} \quad I_2^b = B_{12} B_{21} B_{34} B_{43} \quad I_2^c = C_{12} C_{21} C_{34} C_{43}$$

$$I_3^a = A_{13} A_{31} A_{42} A_{24} \quad I_3^b = B_{13} B_{31} B_{42} B_{24} \quad I_3^c = C_{13} C_{31} C_{42} C_{24}$$

$$I_4^a = A_{14} A_{41} A_{23} A_{32} \quad I_4^b = B_{14} B_{41} B_{23} B_{32} \quad I_4^c = C_{14} C_{41} C_{23} C_{32}.$$

Két-két  $I$  tetraéder az  $R$ ,  $R_t$  tetraéderek egyikével egy desmikus tetraéderrendszer képez, és az összes desmikus tetraéderrendszerek száma 20, melyek 10 konjugált párra oszthatók. E konjugált desmikus tetraéderrendszerpárok a következők:

$ABC$	$T_2 T_3 T_4$
$AI_2^b I_2^c$	$T_2 I_3^a I_4^a$
$AI_3^b I_3^c$	$T_3 I_4^a I_2^a$
$AI_4^b I_4^c$	$T_4 I_2^a I_3^a$
$BI_2^c I_2^a$	$T_2 I_3^b I_4^b$
$BI_3^c I_3^a$	$T_3 I_4^b I_2^b$
$BI_4^c I_4^a$	$T_4 I_2^b I_3^b$
$CI_2^a I_2^b$	$T_2 I_3^c I_4^c$
$CI_3^a I_3^b$	$T_3 I_4^c I_2^c$
$CI_4^a I_4^b$	$T_4 I_2^c I_3^c$

A 15 tetraeder (6 valós, 9 képzetes) tehát 20 desmikus rendszer képez; minden rendszerben van három tetraeder és minden tetraeder négy rendszerben fordul elő ( $3 \cdot 20 = 4 \cdot 15$ ).



5. Hogy a csoportosított tetraéderek tényleg desmikus rendszert képeznek, ez a 3. pont táblázatából tűnik ki; mert egy csoportban levő két tetraéder bármily két szögpontjának összekötő egyenese a harmadik tetraédernek egyik szögpontján megy keresztül. Azt kell tehát csak még kimutatni, hogy az egyes sorokban álló rendszerek konjugáltak.

Az  $AI_2^b I_2^c$  rendszerhez konjugált rendszer tetraédereinek szögpontjait megkapjuk, ha az  $I_2^b$  tetraédernek egyik pl.  $B_{12}$  szögpontján keresztül metszőket húzunk  $A$ -nak élpárjaihoz: a hat metszőpont, valamint az a hat pont, mely amazokat  $A$ -nak szögpontpárjaitól harmonikusan elválasztja, alkotja a konjugált rendszer tetraédereinek szögpontjait.

Az  $A_1 A_2, A_3 A_4$  élpárnak a  $B_{12}$  ponton keresztül menő metszője, ezt az  $E_{12} E_{34}$  pontokban találja; mert a  $B_{12}$  pontból az élpárhoz csak egy metsző húzható; ez pedig a  $B_{12} B_{21} = B_1 B_2 = E_{12} E_{34}$  egyenes. Így tehát  $T_2 = E_{12} F_{12} E_{34} F_{34}$  a konjugált rendszer egyik tetraedere.

Hogy ezt az  $I_3^a$  tetraéderre is kimutassuk csoportosítsuk e 16 pontot következőképen:

$$\begin{array}{c} A_1 E_{12} A_2 F_{12} \\ E_{13} B_1 E_{24} B_3 \\ A_3 E_{34} A_4 F_{34} \\ F_{13} B_2 F_{24} B_4, \end{array}$$

hol úgy a sorokban, mint az oszlopokban az 1-ső és 3-dik pont a 2-dik és 4-diket harmonikusan választja el.

A 2-ik oszlop egyenesén fekvő  $B_{12}, B_{21}$  pontokból az 1-ső, 3-dik és 4-dik oszlopban levő egyenesekhez húzott metszők azokat megfelelőleg az  $A_{13} A_{31}, A_{24} A_{42}, B_{43} B_{34}$  pontpárokban találják. Ennélfogva az  $I_3^a = A_{13} A_{31} A_{42} A_{24}$  tetraéder szintén a konjugált rendszerhez tartozik.

Ha végre e dedukciónál a 3-mas mutatót a 4-sel felcseréljük, akkor azt látjuk, hogy  $I_4^a$  szintén a konjugált rendszerhez tartozó tetraeder lesz.

6. Az előbbi pontban kimutattuk, hogy az  $A_{13} A_{24} B_{12} B_{43}$  pontok



és a hozzájuk konjugált  $A_{31}A_{42}B_{21}B_{34}$  pontok egy-egy egyenesen fekszenek, és mindegyik egyenesen az első pontpár az utóbbit harmonikusan választja el.

Tekintve a

$$\begin{array}{c} C_4 \ E_{12} \ C_3 \ F_{34} \\ E_{23} \ B_1 \ E_{14} \ B_4 \\ C_1 \ E_{34} \ C_2 \ F_{12} \\ F_{14} \ B_2 \ E_{23} \ B_3 \end{array}$$

pontokat, a melyek ugyanoly helyzetűek, mint az előbbi, ily négyzetesrendben felírt pontok, mondhatjuk : hogy a  $B_{12}B_{43}$ ,  $B_{21}B_{34}$  egyenesek, melyek a 2-dik és 4-dik oszlopban álló egyeneseknek  $B_{12}$ ,  $B_{43}$ , illetve  $B_{21}$ ,  $B_{34}$  pontjait kötik össze, az 1-ső és 3-dik oszlopban álló egyeneseknek  $C_{14}$ ,  $C_{32}$  és  $C_{41}$ ,  $C_{23}$  pontjain is keresztül-mennek.

Ennélfogva az

$$\begin{array}{c} A_{13}A_{24}B_{12}B_{43}C_{14}C_{32} \\ A_{31}A_{42}B_{21}B_{34}C_{41}C_{23} \end{array}$$

pontok *egy II. fajú konjugált-képzetes egyenespáron* \* fekszenek, és mindegyik egyenesen az első, középső és végső pontpár közül bármelyik a másik kettőt harmonikusan választja el.

Ilyen II. fajú konjugált-képzetes egyenespár  $i$ , melyeken hat konjugált  $I$  pontpár fekszik, azaz, melyek az  $R$  tetraéderek 18 éle közül mindig hatot-hatot metszenek, hat pár található. Ezek :

$$\begin{array}{ll} i_1 \left\{ \begin{array}{l} A_{12}A_{34}B_{13}B_{42}C_{14}C_{23} \\ A_{21}A_{43}B_{31}B_{24}C_{41}C_{32} \end{array} \right. & i_2 \left\{ \begin{array}{l} A_{12}A_{43}B_{14}B_{32}C_{13}C_{24} \\ A_{21}A_{34}B_{41}B_{23}C_{31}C_{42} \end{array} \right. \\ i_3 \left\{ \begin{array}{l} A_{13}A_{42}B_{14}B_{23}C_{12}C_{34} \\ A_{31}A_{24}B_{41}B_{32}C_{21}C_{43} \end{array} \right. & i_4 \left\{ \begin{array}{l} A_{13}A_{24}B_{12}B_{43}C_{14}C_{32} \\ A_{31}A_{42}B_{21}B_{34}C_{41}C_{23} \end{array} \right. \\ i_5 \left\{ \begin{array}{l} A_{14}A_{23}B_{12}B_{34}C_{13}C_{42} \\ A_{41}A_{32}B_{21}B_{43}C_{31}C_{24} \end{array} \right. & i_6 \left\{ \begin{array}{l} A_{14}A_{32}B_{13}B_{24}C_{12}C_{43} \\ A_{41}A_{23}B_{31}B_{42}C_{21}C_{34} \end{array} \right. \end{array}$$

A 36  $I$  pont tehát 12  $i$  egyenesen akkép oszlik szét, hogy minden egyenes hat pontot tart és minden pontból két egyenes sugárzik ki ( $6 \cdot 12 = 2 \cdot 36$ ).

\* STAUDT. Beiträge z. G. d. L. I. kötet, 77. oldal.



7. Minden  $i$  egyenespár három  $i$  egyenespárt metsz, még pedig az

$$\begin{array}{ccc} i_1 & i_3 & i_5 \\ i_2 & i_4 & i_6 \end{array}$$

egyenespárok közül a különböző sorokban állók metszik egymást.

Jelöljük általában az egyik sorban álló  $i$  egyenespárokat  $i_i$ , vagy vagy  $i_j$ ,  $i_k$ -val, a másik sorban állókat  $i_l$  vagy  $i_m$ ,  $i_n$ -nel.

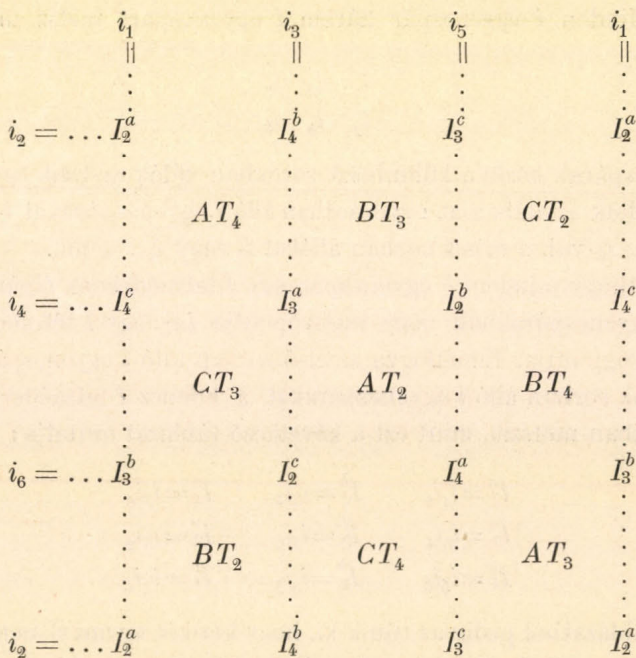
Minthogy minden  $i$  egyenespár egy  $I$  tetraédernek élpárja: az  $i_i$ ,  $i_l$  egyenespáraknak négy metszőpontja  $i_i i_l$ , egy  $I$  tetraédernek négy szögpontja. Ennélfogva az első sorban álló  $i$  egyenespárok, a második sorban álló  $i$  egyenespárokat a kilencz  $I$  tetraéder szög-pontjaiban metszik, mint ezt a következő táblázat mutatja:

$$\begin{array}{lll} I_2^a = i_1 i_2 & I_2^b = i_5 i_4 & I_2^c = i_3 i_6 \\ I_3^a = i_3 i_4 & I_3^b = i_1 i_6 & I_3^c = i_5 i_2 \\ I_4^a = i_5 i_6 & I_4^b = i_3 i_2 & I_4^c = i_1 i_4. \end{array}$$

E táblázatból pedig az tűnik ki, hogy két-két egymást nem metsző egyenespár  $i_i$ ,  $i_j$ ;  $i_l$ ,  $i_m$ , négy  $I$  tetraédernek  $i_i i_l$ ,  $i_i i_m$ ,  $i_j i_l$ ,  $i_j i_m$ -nek képezi éleit. Az  $i_i i_l$ ,  $i_j i_m$ , vagy az  $i_i i_m$ ,  $i_j i_l$  tetraéderpárok azzal az  $R$ , vagy  $R_t$  tetraéderrel alkotnak desmikus rendszert, melynek éleit az  $i_i i_m$ ,  $i_j i_l$ , illetve az  $i_i i_l$ ,  $i_j i_m$  tetraedereknek valós élei képezik; mind a hat tetraeder pedig egy konjugált rendszert alkot. Az  $R$  és  $R_t$  tetraedereknek harmadik élpárja pedig az  $i_k i_n$  tetraédernek valós élpárja, azaz: az  $R$  vagy  $R_t$  tetraederek élpárjai az  $i_i i_l$ ,  $i_j i_m$ ,  $i_k i_n$  egyenespárok metszőpontjainak valós összekötő egyenesei.

A következő schemából az egész konfiguráció könnyen áttekinthető:





8. Eddigi vizsgálatunk eredményeit a következő tételbe akarjuk egybefoglalni:

*Ha valamely valós konjugált desmikus tetraéderrendszerpár tetraédereinek 18 élét  $r$ -el, 24 szögpontját  $R$ -rel, azt a 18 konjugált képzetes pontpárt az éleken, mely a szögpontpárok harmonikusan elválasztja  $I$ -vel jelöljük, akkor a 36  $I$  pont hatával 6  $II$  fajú konjugált képzetes egyenespáron  $i$ -n fekszik, és úgy az  $r$ , mint az  $i$  egyeneseken a hat pont oly három pontpárra bontható, hogy e párok közül bármelyik a másik kettőt harmonikusan választja el, azaz hatszorosan involucziós. A 30 egyenes ( $r$ ,  $i$ ) és a 60 pont ( $R$ ,  $I$ ) tehát egy  $(30_6, 60_3)$  konfigurációt képez.*

A 30 egyenes és a 60 pont 15 tetraedernek, az eredeti 6 valós-nak és 9 képzetesnek éle és szögpontja. E 15 tetraeder 10 konjugált desmikus tetraederrendszerpárra osztható; ezeknek egyike az eredeti rendszer, melynek tetraéderei valósak, a többi 18 rendszer pedig egy valós és két képzetes tetraederből áll, és minden tetraeder négy rendszerben fordul elő.



A 60 pont, mint 20 desmikus tetraederrendszernek szögpontja hármásával 32 valós és 144 I. fajú konjugált képzetes egyenes-páron fekszik aképen, hogy minden valós pontból 4 valós és 12 képzetes, minden képzetes pontból 16 képzetes egyenes sugárzik ki. E pontok és egyenesek tehát egy  $(320_3, 60_{16})$  konfigurációt képeznek.

Ha e tételben a pontokat síkokkal cseréljük fel, akkor egy új tételt nyerünk, mely a desmikus tetraederrendszer 15 tetraederének lapjaira és éleire vonatkozik. E tétel alapján következőkép jellemezhetjük azt az alakzatot, mely szerint egy általános helyzetű sík a teljes desmikus tetraéderrendszert metszi:

Valamely teljes desmikus tetraéderrendszer síkmetszése teljes desmikus négyoldalrendszer, mely 6 valós és 9 képzetes négyoldalból áll. E 15 négyoldalnak 18 valós és 6 pár konjugált képzetes szögpontja, tehát csak 30 szögpontja, továbbá 24 valós és 16 pár konjugált képzetes oldala van. Minden szögpontból három oldal-pár sugárzik ki, melyek közül bármelyik a másik kettőt harmonikusan választja el. Az alakzat ekkép felfogva egy  $(60_3, 30_6)$  konfigurációt alkot.

A 15 négyoldal húszszor bontható fel hármásával akképen, hogy a három négyoldalnak, mely egy egyszerű desmikus négyoldalrendszernek nevezhető, 12 oldala egymást hármásával 16 pontban metszi. Két-két egyszerű desmikus négyoldalrendszer négyoldalainak ugyanaz a 12 szögpontja van; ezeket konjugált rendszereknek vagy rendszerpáraknak nevezhetjük. A tíz pár konjugált desmikus négyoldalrendszer közül egyiknek mind a hat négyoldala valós, a többi párokban egy-egy négyoldal valós, a többi kettő-kettő képzetes négyoldal.

E tíz pár konjugált desmikus négyoldalrendszer 60 oldala és az a 320 pont, melyben azok egymást hármásával metszik, egy  $(60_{16}, 320_3)$  konfigurációt képez.

Egy négyoldal és egy egyenes, mely annak síkjában fekszik, de egyik szögpontján sem megy keresztül és egy az egyenesen fekvő pont, egy egyszerű és ezzel egyszersmind egy teljes desmikus négyoldalrendszert határoz meg; ennek egyik négyoldala ama



*felvett négyoldal, egy másik négyoldalának egy oldalát és egy szögpontját a felvett egyenes és a pont képezi.*

## 2. A teljes desmikus hiperboloid- és kúpszelet-rendszer.

9. Az  $A$  tetraédernek élei három tétnégyyszögnek, vagy rövidebben mondva négyszögnek,

$$A_1A_4A_2A_3, \quad A_1A_2A_3A_4, \quad A_1A_3A_4A_2$$

nek oldalai. E négyszögek oldalain és a  $B_1$  ponton keresztül megfelelőleg egy  $c_2, c_3, c_4$  hiperboloid fektethető keresztül. Két-két ily hiperboloidnak két ugyanegy rendszerhez tartozó közös alkotója van, mely  $A$ -nak egy élpárja, s ezért azok egymást még két a másik rendszerhez tartozó alkotóban metszik. Ez utóbbi alkotóknak egyike a  $B$  tetraédernek  $B_1B_i$  éle, a másik ennek párja  $B_jB_k$ . Ebből látható, hogy ama hiperboloidok a  $B$  tetraéder éleiből alkotható

$$B_1B_4B_2B_3, \quad B_1B_2B_3B_4, \quad B_1B_3B_4B_2$$

négyszögek oldalain is keresztül mennek.

Hasonló következtetés folytán a

$$\begin{array}{ll} B_1B_4B_2B_3 & C_1C_4C_2C_3 \\ B_1B_2B_3B_4 & C_1C_2C_3C_4 \\ B_1B_3B_4B_2 & C_1C_3C_4C_2 \end{array}$$

négyszögek oldalai egy  $a_2, a_3, a_4$  hiperboloidon fekszenek és a

$$\begin{array}{ll} C_1C_4C_2C_3 & A_1A_4A_2A_3 \\ C_1C_2C_3C_4 & A_1A_2A_3A_4 \\ C_1C_3C_4C_2 & A_1A_3A_4A_2 \end{array}$$

négyszögek oldalai egy  $b_2, b_3, b_4$  hiperboloidon fekszenek.

Mint hogy az  $R=ABC$  tetraédereknek élei egyszersmind élei az  $R_t=T_2T_3T_4$  tetraédereknek, azért ama hiperboloidok két-két  $R_t$  tetraéder éleiből alkotható négyszögeknek oldalain is keresztül mennek.



Igy pl. az  $a_2, b_2, c_2$  hiperboloidok rendre az

$$\begin{array}{ll} F_{13}E_{24}F_{13}F_{24} & E_{14}E_{23}F_{14}F_{23} \\ E_{13}F_{24}E_{24}F_{13} & E_{14}F_{23}E_{23}F_{14} \\ E_{13}F_{13}F_{24}E_{24} & E_{14}F_{14}F_{23}E_{23} \end{array}$$

négyszögek oldalain mennek keresztül.

Három oly hiperboloidról, mely két tetraédernek négy-négy élpárján és így együttvéve ezeknek összes élein keresztül megy, azt mondhatjuk, hogy azok egy *egyszerű desmikus hiperboloid-rendszert* képeznek, vagy egy ily rendszerhez tartoznak.

A következő táblácska sorai- és oszlopaiban álló hiperboloidok egy-egy egyszerű desmikus rendszert alkotnak:

$\bigcirc h$	$T_3T_4$	$T_4T_2$	$T_2T_3$
$BC$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$CA$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
$AB$	$c_2$	$c_3$	$c_4$

10. Az előbbi pontban felírt négyszögekből látható, hogy

a  $b_3c_4$  hiperboloidpárnak közös alkotója az  $A_1A_2, A_3A_4$  élpár,  
a  $c_4a_2$  " " " "  $B_1B_3, B_4B_2$  "  
az  $a_2b_3$  " " " "  $C_1C_4, C_2C_3$  "

E három hiperboloidpárnak van azonban még egy közös alkotópárja, t. i. az

$$i_1 \left\{ \begin{array}{l} A_{12}A_{34}B_{13}B_{42}C_{14}C_{23} \\ A_{21}A_{43}B_{31}B_{24}C_{41}C_{32} \end{array} \right.$$

egyenespár.

Ugyanekkép következtetve:

az  $a_2b_3c_4$  hiperboloidoknak közös alkotója az  $i_1$  egyenespár  
"  $a_2b_4c_3$  " " " "  $i_2$  "



az  $a_3b_4c_2$  hiperboloidoknak közös alkotója az  $i_3$  egyenespár

" $a_3b_2c_4$	"	"	"	$i_4$	"
" $a_4b_2c_3$	"	"	"	$i_5$	"
" $a_4b_3c_2$	"	"	"	$i_6$	"

Maguk az  $i_1 \dots i_6$  egyenespárok szintén egy hiperboloidon  $h$ -n fekszenek, mert  $i_1i_3i_5$  metszi az  $i_2i_4i_6$ -ot.

Az  $i_1i_2$ ,  $i_3i_4$ ,  $i_5i_6$  egyenespáraknak négy-négy metszőpontján még az  $A_1A_2$ ,  $A_3A_4$ , illetve az  $A_1A_3$ ,  $A_4A_2$ ;  $A_1A_4$ ,  $A_2A_3$  egyenespárok is keresztül mennek; ez utóbbiak tehát reciprok polárisok, és így az  $A$  tetraéder polártetraéder a  $h$  hiperboloidra vonatkozólag.

Hasonlókép a  $B$ ,  $C$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$  tetraéderek is polártetraéderei a  $h$ -nak, mert pl. a  $B$ -nek, illetve a  $T_2$ -nek élpárjai az

$$i_1i_6, i_3i_2, i_5i_4, \text{ illetve } i_1i_2, i_3i_6, i_5i_4$$

egyespáraknak metszőpontjain mennek keresztül.

Igy tehát az *eredeti konjugált desmikus tetraéderrendszerpár tetraéderei, a h hiperboloidra vonatkozólag polártetraéderek.*

11. Vizsgáljuk most meg, hogy a teljes desmikus tetraéderrendszer többi kilencz egyszerű rendszerpárjában előforduló tetraéder élein mily hiperboloidok mennek keresztül. E végből áttekinthetőleg fel kell írunk, hogy a 30  $(r, i)$  egyenes miként van hat párjával szétosztva a tiz  $a_2, a_3 \dots a_4$ ,  $h$  hiperboloidon. Erre szolgál a következő táblázat:



$h$ 

$$\begin{aligned} i_1 & \left\{ \overbrace{A_{12}A_{34}}^{i_2} \overbrace{B_{13}B_{42}}^{i_6} \overbrace{C_{14}C_{23}}^{i_4} \right. \\ & \left. A_{43}A_{21}B_{24}B_{31}C_{32}C_{41} \right. \\ i_3 & \left\{ B_{14}B_{32}C_{12}C_{34}A_{13}A_4 \right. \\ & \left. B_{32}B_{41}C_{43}C_{21}A_{24}A_{13} \right. \\ i_5 & \left\{ C_{13}C_{42}A_{14}A_{23}B_{12}B_{34} \right. \\ & \left. C_{24}C_{31}A_{32}A_{41}B_{43}B_{21} \right. \end{aligned}$$

 $a_2$ 

$$\begin{aligned} B_1 E_{14}B_4 E_{23}B_{14}B_{41} \\ E_{24}C_3 F_{13}C_1 C_{13}C_{31} \\ B_3 F_{23}B_2 F_{14}B_{32}B_{23} \\ E_{13}C_2 F_{24}C_4 C_{24}C_{42} \\ B_{13}C_{23}B_{42}C_{14}A_{12}A_{34} \\ B_{31}C_{32}B_{24}C_{41}A_{43}A_{21} \end{aligned}$$

 $a_3$ 

$$\begin{aligned} B_1 E_{12}B_2 E_{34}B_{12}B_{21} \\ E_{23}C_4 F_{14}C_1 C_{14}C_{41} \\ B_4 F_{34}B_3 F_{12}B_{43}B_{34} \\ E_{14}C_3 F_{23}C_2 C_{32}C_{23} \\ B_{14}C_{34}B_{23}C_{12}A_{13}A_{42} \\ B_{41}C_{43}B_{32}C_{21}A_{24}A_{13} \end{aligned}$$

 $a_4$ 

$$\begin{aligned} B_1 E_{13}B_3 E_{24}B_{13}B_{31} \\ E_{34}C_2 F_{12}C_1 C_{12}C_{21} \\ B_2 F_{24}B_4 F_{13}B_{24}B_{42} \\ E_{12}C_4 F_{34}C_3 C_{43}C_{34} \\ B_{12}C_{42}B_{34}C_{13}A_{14}A_{23} \\ B_{21}C_{24}B_{43}C_{31}A_{32}A_{41} \end{aligned}$$

 $b_2$ 

$$\begin{aligned} C_2 E_{23}C_4 F_{14}C_{14}C_{41} \\ F_{13}A_3 E_{13}A_1 A_{13}A_{31} \\ C_3 F_{23}C_2 E_{14}C_{32}C_{23} \\ E_{24}A_2 F_{24}A_4 A_{24}A_{42} \\ C_{13}A_{23}C_{42}A_{14}B_{12}B_{34} \\ C_{31}A_{32}C_{24}A_{41}B_{43}B_{21} \end{aligned}$$

 $b_3$ 

$$\begin{aligned} C_1 E_{34}C_2 F_{12}C_{12}C_{21} \\ F_{14}A_4 F_{14}A_1 A_{14}A_{41} \\ C_4 F_{34}C_3 E_{12}C_{43}C_{34} \\ E_{23}A_3 F_{23}A_2 A_{32}A_{23} \\ C_{14}A_{34}C_{23}A_{12}B_{13}B_{42} \\ C_{41}A_{43}C_{32}A_{21}B_{24}B_{31} \end{aligned}$$

 $b_4$ 

$$\begin{aligned} C_1 E_{24}C_3 F_{13}C_{13}C_{31} \\ F_{12}A_2 E_{14}A_1 A_{12}A_{21} \\ C_2 F_{24}C_2 E_{13}C_{42}C_{24} \\ E_{34}A_4 F_{34}A_3 A_{43}A_{34} \\ C_{12}A_{42}C_{34}A_{13}B_{14}B_{23} \\ C_{21}A_{24}C_{43}A_{31}B_{32}B_{41} \end{aligned}$$

 $c_2$ 

$$\begin{aligned} A_1 F_{14}A_4 E_{14}A_{14}A_{41} \\ E_{13}B_3 E_{24}B_1 B_{13}B_{31} \\ A_3 F_{23}A_2 E_{23}A_{32}A_{23} \\ F_{13}B_2 F_{24}B_4 B_{24}B_{42} \\ A_{13}B_{23}A_{42}B_{14}C_{12}C_{34} \\ A_{31}B_{32}A_{24}B_{41}C_{43}C_{21} \end{aligned}$$

 $c_3$ 

$$\begin{aligned} A_1 F_{12}A_2 E_{14}A_{12}A_{21} \\ E_{14}B_4 E_{23}B_1 B_{14}B_{41} \\ A_4 E_{34}A_3 F_{34}A_{43}A_{34} \\ F_{14}B_3 F_{23}B_2 B_{32}B_{23} \\ A_{14}B_{34}A_{23}B_{12}C_{13}C_{42} \\ A_{41}B_{43}A_{32}B_{21}C_{24}C_{31} \end{aligned}$$

 $c_4$ 

$$\begin{aligned} A_1 F_{13}A_3 E_{13}A_{13}A_{31} \\ E_{12}B_2 E_{34}B_1 B_{12}B_{21} \\ A_2 F_{24}A_4 E_{24}A_{42}A_{24} \\ F_{12}B_4 F_{34}B_3 B_{43}B_{34} \\ A_{12}B_{42}A_{34}B_{13}C_{14}C_{23} \\ A_{21}B_{24}A_{43}B_{31}C_{32}C_{41} \end{aligned}$$



E táblázat egyes négyzetes csoportja úgy van összeállítva, hogy a sorokban és az oszlopokban álló pontok a fölötte megjelölt hiperboloid egy-egy alkotójának pontjai.

Ebből könnyen felírható a következő táblázat, mely azt tünteti ki, hogy a hiperboloidoknak négyesével mily közös alkotópárjuk van.

Az $A_1A_2, A_3A_4$	egyenespár a	$b_3c_3b_4c_4$
" $A_1A_3, A_4A_2$	"	$b_4c_4b_2c_2$
" $A_1A_4, A_2A_3$	"	$b_2c_2b_3c_3$
a $B_1B_2, B_3B_4$	"	$c_3a_3c_4a_4$
" $B_1B_3, B_4B_2$	"	$c_4a_4c_2a_2$
" $B_1B_4, B_2B_3$	"	$c_2a_2c_3a_3$
" $C_1C_2, C_3C_4$	"	$a_3b_3a_4b_4$
" $C_1C_3, C_4C_2$	"	$a_4b_4a_2b_2$
" $C_1C_4, C_2C_3$	"	$a_2b_2a_3b_3$
" $i_1$	"	$h a_2b_3c_4$
" $i_2$	"	$h a_2b_4c_3$
" $i_3$	"	$h a_3b_4c_2$
" $i_4$	"	$h a_3b_2c_4$
" $i_5$	"	$h a_4b_2c_3$
" $i_6$	"	$h a_4b_3c_2$

hiperboloidoknak közös alkotópárja.

Abból a körülményből, hogy a 15 egyenespár a tíz hiperboloid irányában egyenlőképen viselkedik ugyanazon az úton, mint a 9-ik pontban, következtethető, hogy az 1-ső, 2-dik, . . . 10-dik konjugált desmikus tetraéderrendszerpárnak tetraederei a

$$h a_2a_3a_4b_2b_3b_4c_2c_3c_4$$

hiperboloidoknak polártetraederei.

A kilencz új rendszerhez tartozó táblácskák (9) a következők:



$\odot a_2$	$I_3^a I_4^a$	$I_4^a T_2^a$	$I_3^a T_2$
$AI_2^b$	$b_2$	$c_3$	$c_4$
$AI_2^c$	$c_2$	$b_3$	$b_4$
$I_2^b I_2^c$	$h$	$a_4$	$a_3$

$\odot a_3$	$I_4^a I_2^a$	$I_5^a T_3$	$I_4^a T_3$
$AI_3^b$	$b_3$	$c_4$	$c_2$
$AI_3^c$	$c_3$	$b_4$	$b_3$
$I_3^b I_3^c$	$h$	$a_2$	$a_4$

$\odot a_3$	$I_2^a I_3^a$	$I_3^a T_4$	$I_2^a T_4$
$AI_4^b$	$b_4$	$c_2$	$c_3$
$AI_4^c$	$c_4$	$b_2$	$b_3$
$I_4^b I_4^c$	$h$	$a_3$	$a_2$

$\odot b_2$	$I_3^b I_4^b$	$I_4^b T_2$	$I_3^b T_2$
$BI_2^c$	$c_2$	$a_3$	$a_4$
$BI_2^a$	$a_2$	$c_3$	$b_4$
$I_2^c I_2^a$	$h$	$b_4$	$b_3$

$\odot b_3$	$I_4^b I_2^b$	$I_2^b T_3$	$I_4^b T_3$
$BI_3^c$	$c_3$	$a_4$	$a_2$
$BI_3^a$	$a_3$	$c_4$	$c_2$
$I_3^c I_3^a$	$h$	$b_2$	$b_4$

$\odot b_4$	$I_2^b I_3^b$	$I_3^b T_4$	$I_2^b T_4$
$BI_4^c$	$c_4$	$a_2$	$a_3$
$BI_4^a$	$a_4$	$c_2$	$c_3$
$I_4^c I_4^a$	$h$	$b_3$	$b_2$

$\odot c_2$	$I_3^c I_4^c$	$I_4^c T_2$	$I_3^c T_2$
$CI_2^a$	$a_2$	$b_3$	$b_4$
$CI_2^b$	$b_2$	$a_3$	$a_4$
$I_2^a I_2^b$	$h$	$c_4$	$c_3$

$\odot c_3$	$I_4^c I_2^c$	$I_2^c T_3$	$I_4^c T_3$
$CI_3^a$	$a_3$	$b_4$	$b_2$
$CI_3^b$	$b_3$	$a_4$	$a_2$
$I_3^a I_3^b$	$h$	$c_2$	$c_4$

$\odot c_4$	$I_2^c I_3^c$	$I_3^c T_4$	$I_2^c T_4$
$CI_4^a$	$a_4$	$b_2$	$b_3$
$CI_4^b$	$b_4$	$a_2$	$a_3$
$I_4^a I_4^b$	$h$	$c_2$	$c_2$



Minden táblácskában a  $\bigcirc$ -be foglalt hiperboloid az, melyre vonatkozólag az illető rendszer tetraederei polártetraederek, azaz, mely az illető rendszernek *direktrixje*, vagy *vezérlő hiperboloidja*.

12. Mielőtt a tárgyalás eredményét tételbe foglalnók, még két kérdésre kell felelnünk. Az első kérdés az, hogy az eredetileg felvett desmikus tetraederrendszernek vezérlő hiperboloidja  $h$  valós-e vagy képzetes?

Abból, hogy a  $h$ -n konjugált-képzetes egyenespárok, az  $i$  egyenespárok, fekszenek, még nem lehet arra következtetni, hogy  $h$  képzetes, mert a valós hiperboloidon is vannak konjugált-képzetes egyenespárok. Amde egy valós hiperboloidon azok az alkotópárok, melyek egy konjugált-képzetes alkotópárt harmonikusan választanak el, valósak.  $h$ -nál azonban, mint láttuk, a képzetes  $i_i$  alkotópárok a képzetes  $i_j$  és  $i_k$  alkotópárok választják el harmonikusan; a miből szükségképp következik, hogy  $h$  képzetes.

Egy más argumentum, mely szintén ezt igazolja, az volna, hogy az  $R$  és  $R_i$  polártetraéderek élei a  $h$ -t konjugált-képzetes pontokban metszik, míg a valós hiperboloidot minden polártetraeder két élpárja valós pontokban metszi. A  $h$  hiperboloid tehát képzetes s mint ilyen nem különbözik bármily más képzetes II. r. felülettől.

A valós desmikus tetraederrendszernek tehát egy képzetes II. r. felület a vezérlő felülete, míg a képzetes desmikus tetraederrendszernek, azaz olyanak, mely egy valós és két képzetes tetraéderből áll, vezérlő felülete egy valós egyágú hiperboloid.

13. A második kérdés, mely feleletre vár az, hogy két hiperboloid, mely egymást egy négyszögben metszi, lehet-e általában egy desmikus hiperboloidrendszernek két hiperboloidja?

Két hiperboloid  $b'_2, c_2$ , mely egymást az  $A_1A_4A_2A_3$  négyszögben metszi, négyfélekep centrikusan kollineár alakzata egymásnak; a kollineáció-középpontok a négyszögnek szögpontjai, a kollineáció-síkok pedig a négyszög többi három szögpontján keresztül menő síkok.

Ugyanis a  $b'_2, c_2$  hiperboloidoknak az  $A_i$  szögpontban közös érintői síkjuk van, mely a négyszögnek az  $A_i$  pontban találkozó oldalain meggy keresztül; a többi három szögponton keresztül menő  $a_i$  sík



pedig a két hiperboloidot a négyszög másik két oldalában metszi. Ha a  $C'_i$  pont a  $b'_2$  hiperboloidnak tetszőleges pontja, akkor az a  $b_2^*$  hiperboloid, mely a  $C'_i$  ponton keresztül menve a  $c_2$ -vel az  $A_i$  pontra és az  $a_i$  síkra vonatkozólag centríkusan kollineár, a  $b'_2$ -vel egybeesik, mert  $b_2^*$  és  $b'_2$  a  $C'_i$  ponton és az  $A_1A_4A_3A_2$  négyszög oldalain megy keresztül és ezektől meg van határozva. Ebből következik, hogy az  $A_i$  ponton keresztül menő egyenesek a  $b'_2$ ,  $c_2$  hiperboloidokat és az  $a_i$  síkot oly négy pontban metszik, melyek projektív pontnégyest képeznek.

Messe ezután az  $A_1$  ponton keresztül menő egyenes a  $b'_2$ ,  $c_2$  hiperboloidokat a  $C'_1$ ,  $B_1$  pontokban, és legyenek a hiperboloidoknak e pontokon keresztül menő alkotói  $C'_1C'_4$ ,  $C'_1C'_3$ ,  $B_1B_4$ ,  $B_1B_3$ ; végre jelöljük  $C'_2C'_3$ ,  $C'_2C'_4$ ;  $B_2B_3$ ,  $B_2B_4$ -gyel azokat az alkotókat, melyek amazokat az  $A_1A_4A_3A_2$  négyszög szemben fekvő oldalaitól harmonikusan elválasztják.

A  $C'_1C'_4C'_2C'_3$ ,  $B_1B_4B_2B_3$  négyszögek oldalainak metszőpontjai az  $A_1A_4A_2A_3$  négyszög oldalaival, a következő pontcsoportokból látható

$$\begin{array}{ll} A_1 E'_{14} A_4 F'_{14} & A_1 E_{14} A_4 F_{14} \\ F'_{13} C'_3 E'_{24} C'_1 & F_{13} B_4 F_{24} B_2 \\ A_3 F'_{23} A_2 E'_{23} & A_3 E_{23} A_2 F_{23} \\ E'_{13} C'_2 F'_{24} C'_4 & E_{13} B_1 E_{24} B_3, \end{array}$$

hol úgy a sorok, mint az oszlopokban levő pontok harmonikus négyest képeznek.

Tekintettel a  $b'_2$ ,  $c_2$  hiperboloidokra

$$A_2A_3(A_1B_1A_4C'_1) \overline{\wedge} A_1A_4(A_1E_{14}A_4F'_{14}),$$

a miből a négyzetes pontcsoportokra pillantva, kitűnik, hogy az  $E'_{ij}$ ,  $F'_{ij}$  pontok csak akkor esnek egybe az  $E_{ij}$ ,  $F_{ij}$  pontokkal, ha az  $A_2A_3(A_1B_1A_4C'_1)$  síknégyes harmonikus, azaz ha a hiperboloidok centríkusan involúziós fekvésűek. Minthogy ekkor a

$$\begin{array}{l} B_1 E_{14} B_4 E_{23} \\ E_{24} C'_3 F_{13} C'_1 \\ B_3 F_{23} B_2 F_{14} \\ E_{13} C'_2 F_{24} C'_4 \end{array}$$



sorok és oszlopokban harmonikus négyesek állanak: a  $B_1B_4B_2B_3$ ,  $C_1C_4C_2C_3$  négyszögek szintén egy  $a'_2$  hiperboloidon fekszenek és az  $a'_2$ ,  $b'_2$ ,  $c_2$  hiperboloidok egy desmikus rendszert alkotnak.

Ebből következik, hogy két egymást egy négyszögben metsző hiperboloidot általában nem lehet egy hyperboloiddal egy egyszerű desmikus rendszerré kiegészíteni, azaz nincsen oly hyperboloid, mely amazokat egy-egy négyszögben metszené. Ha azonban a felvett két hiperboloid egyszer, tehát négyszer, centríkusan involúziós, akkor a két hiperboloidot  $\infty^2$  hyperboloid egészíti ki desmikus rendszerré.

14. Ezek után a tárgyalás eredményeit következő tételbe foglalhatjuk össze:

*Valamely egyszerű desmikus tetraéderrendszer tetraédereinek két-két egymást ugyanabban a nyolcz pontban metsző élpárján három hiperboloid megy keresztül, mely egy egyszerű desmikus rendszert képez. E rendszer két-két hiperboloidja a közös négyszög bármely szögpontjára és a többi három szögponton keresztül menő síkra vonatkozólag centríkusan involúziós.*

*Az egyszerű desmikus tetraéderrendszer tíz hyperboloidot határoz meg; ezek közül egyike, a rendszer vezérlő hiperboloidjára vonatkozólag, a rendszer tetraéderei, polártetraéderek; a többi kilencz hiperboloid hat desmikus rendszerré csoportosítható. E tíz hiperboloid, mely közül kilencz valós egy képzetes, oly helyzetű, hogy*

1. bármelyik a többi kilenczet négyszögekben metszi;
2. egyenként vezérlő hyperboloidja azoknak a konjugált desmikus tetraéderrendszerpáraknak, melyekre egy teljes desmikus tetraéderrendszer oszlik;
3. 60-szor bontható egyszerű desmikus rendszerre; minden hiperboloid 18 rendszerben fordul elő;
4. 15-ször csoportosítható négyesével akképen, hogy minden négyesnek egy közös alkotópárja van.

15. Messük a teljes desmikus hyperboloid- és a vele kapcsolatos tetraéderrendszert egy síkkal. A metszési idom 10 kúpszelet és 15 négyoldal lesz. A kúpszeletekről azt mondjuk, hogy teljes des-



*mikus kúpszeletrendszert*, a négyoldalakról tudjuk, hogy teljes desmikus négyoldalrendszert képeznek.

Vegyünk egy egyszerű desmikus négyoldalrendszert tekintetbe, melynek oldalai  $a_1a_2a_3a_4$ ,  $b_1b_2b_3b_4$ ,  $c_1c_2c_3c_4$  az  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  tetraéderek lapjainak metszővonalai a síkkal.

Mindegyik négyoldal három egyszerű négyoldalra bontható, ú. m.

$$\begin{array}{lll} a_1a_4a_2a_3 & b_1b_4b_2b_3 & c_1c_4c_2c_3 \\ a_1a_2a_3a_4 & b_1b_2b_3b_4 & c_1c_2c_3c_4 \\ a_1a_3a_4a_2 & b_1b_3b_4b_2 & c_1c_3c_4c_2 \end{array}$$

Az egyes sorokban felírt négyoldalak szögpontjai hármásával a konjugált desmikus négyoldalrendszer

$$\begin{array}{ll} e_{13}f_{13}e_{42}f_{42} & e_{14}f_{14}e_{23}f_{23} \\ e_{14}f_{14}e_{23}f_{23} & e_{12}f_{12}e_{34}f_{34} \\ e_{12}f_{12}e_{34}f_{34} & e_{13}f_{13}e_{42}f_{42} \end{array}$$

négyoldalainak oldalain, és azonkívül két-két négyoldalnak szögpontjai egy kúpszeleten fekszenek. Három ily kúpszeletről, mely egy sorban levő két-két négyoldalnak nyolcz-nyolcz szögpontján megy keresztül, azt mondjuk, hogy egyszerű desmikus rendszert alkot. Ama négyoldalakból származó s egy egyszerű rendszert alkotó kúpszeletek tehát az egyes sorokban itt következnek:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A}_2 \left\{ \begin{array}{l} b_1b_4b_2b_3 \\ c_1c_4c_2c_3 \end{array} \right. & \mathfrak{B}_2 \left\{ \begin{array}{l} c_1c_4c_2c_3 \\ a_1a_4a_2a_3 \end{array} \right. & \mathfrak{C}_2 \left\{ \begin{array}{l} a_1a_4a_2a_3 \\ b_1b_4b_2b_3 \end{array} \right. \\ \mathfrak{A}_3 \left\{ \begin{array}{l} b_1b_2b_3b_4 \\ c_1c_2c_3c_4 \end{array} \right. & \mathfrak{B}_3 \left\{ \begin{array}{l} c_1c_2c_3c_4 \\ a_1a_2a_3a_4 \end{array} \right. & \mathfrak{C}_3 \left\{ \begin{array}{l} a_1a_2a_3a_4 \\ b_1b_2b_3b_4 \end{array} \right. \\ \mathfrak{A}_4 \left\{ \begin{array}{l} b_1b_3b_4b_2 \\ c_1c_3c_4c_2 \end{array} \right. & \mathfrak{B}_4 \left\{ \begin{array}{l} c_1c_3c_4c_2 \\ a_1a_3a_4a_2 \end{array} \right. & \mathfrak{C}_4 \left\{ \begin{array}{l} a_1a_3a_4a_2 \\ b_1b_3b_4b_2 \end{array} \right. \end{array}$$

E kilencz kúpszelet és az a h kúpszelet, melyre vonatkozólag ama négyoldalak poláris négyoldalok: a teljes desmikus hiperboloidrendszer metszése a síkkal; tehát ezek képezik a teljes desmikus kúpszeletrendszert.

A három egy egyszerű desmikus rendszert alkotó kúpszeletekre jellemző az a tulajdonság, hogy azoknak 12 metszőpontja négy



párjával akkép van elhelyezve az egyes kúpszeleteken, hogy két pár és a másik két pár egymást harmonikusan válaszja el.

Kimutatható, hogy ha valamely kúpszeleten négy ily pontpárt veszünk fel, akkor azok oly négyoldalaknak képezik szögpontját, melyek egy desmikus négyoldalrendszerhez tartoznak, s így található egy négyoldal, mely ezeket egy desmikus rendszerré egészíti ki.

Legyen e végből  $a_1a_4a_2a_3$ ,  $b_1b_4b_2b_3$  egy tetszőleges  $\mathfrak{C}_2$  kúpszeletbe irt oly két négyoldal, hogy azoknak

$$(a_1a_3)(b_1b_4)(a_4a_2)(b_2b_3) \\ (a_1a_4)(b_1b_3)(a_2a_3)(b_4b_2)$$

szögpontjai harmonikus négyeseket képezzenek.

Ennélfogva

$$(a_1a_3)(b_1b_4)(a_4a_2)(b_2b_3) \wedge (b_1b_3)(a_1a_4)(b_4b_2)(a_2a_3) \wedge \\ \wedge (b_4b_2)(a_2a_3)(b_1b_3)(a_1a_4) \wedge \dots$$

s mert a nyolcz pont egy kúpszeleten fekszik, azért az első és a második, valamint az első és a harmadik négyesnek projektivitásából látható, hogy az

$$\begin{aligned} ((a_1a_3)(a_1a_4), (b_1b_3)(b_1b_4)) &= (a_1b_1) \\ ((a_4a_2)(a_2a_3), (b_4b_2)(b_2b_3)) &= (a_2b_2) \\ ((a_1a_3)(a_2a_3), (b_1b_3)(b_2b_3)) &= (a_3b_3) \\ ((a_4a_2)(a_1a_4), (b_4b_2)(b_1b_4)) &= (a_4b_4) \\ ((a_1a_3)(a_1a_4), (b_4b_2)(b_2b_3)) &= (a_1b_2) \\ ((a_4a_2)(a_2a_3), (b_1b_3)(b_1b_4)) &= (a_2b_1) \\ ((a_1a_3)(a_2a_3), (b_4b_2)(b_4b_1)) &= (a_3b_4) \\ ((a_4a_2)(a_1a_4), (b_2b_3)(b_1b_3)) &= (a_4b_3) \\ &\text{stb.} \end{aligned}$$

tehát az első négy pont egy  $c_1$  egyenesen, az utóbbi egy  $c_2$  egyenesen fekszik, s ilyen egyenes van még kettő  $c_3$ ,  $c_4$ .

Mínthogy az

$$a_1a_2a_3a_4, \quad b_1b_2b_3b_4, \quad c_1c_2c_3c_4$$

négyoldalaknak oldalai egymást ugyanabban a 16 pontban metszik,



azért ezek egy egyszerű desmikus négyoldalrendszert, míg a második és harmadik, a harmadik és első, végre az első és második négyoldal körül irt  $\mathcal{M}_2$ ,  $\mathcal{B}_2$ ,  $\mathcal{C}_2$  kúpszelet egy egyszerű desmikus kúpszeletrendszert képez.

16. A 14. pont alatt levő tételből a desmikus tetraéder- és hiperboloidrendszer síkmetszésére, a desmikus négyoldal- és kúpszeletrendszerre vonható következtetést e tételbe foglaljuk össze :

*Valamely egyszerű desmikus négyoldalrendszer négyoldalainak két-két ugyanazon a nyolcz egyenesen fekvő szögpontpárján három kúpszelet megy keresztül, mely egyszerű desmikus rendszert alkot. E rendszer bármely kúpszeletét a másik kettő oly pontpárakban metszi, hogy azok közül kettő és a másik kettő egymást harmonikusan választja el.*

Az egyszerű desmikus négyoldalrendszer tíz kúpszeletet határoz meg ; ezek közül egyikre, a rendszer vezérlő kúpszeletére vonatkozólag, a desmikus négyoldalrendszer és a hozzá konjugált rendszer négyoldalai poláris négyoldalak ; a többi kilencz kúpszelet hat egyszerű desmikus rendszerre csoportosítható. E tíz kúpszelet, mely közül egy valós, kilencz képzetes, oly helyzetű, hogy :

1. egyenként vezérlő kúpszelete azoknak a konjugált desmikus négyoldalrendszerpáraknak, melyekre egy teljes desmikus négyoldalrendszer bontható ;

2. 60-szor bontható egyszerű desmikus rendszerre ; minden kúpszelet 18 rendszerben fordul elő ;

3. 15-szor csoportosítható négyesével akképen, hogy minden ily négyes egy közös pontpáron megy keresztül.

Klug Lipót.



## ADALÉK A KAPCSOLÁSTANHOZ.

Ismeretes, hogy ha  $n$  elem között  $k$  elem megegyezik egymással és a többi  $n-k$  elem is egymás közt megegyező, akkor a permutációk száma

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ugyanakkora, mint az  $n$  elemből alkotható  $k$ -ad osztályú kombinációk száma.

E két szám megegyezését akarom e néhány sorban indokolni azzal, hogy megmutatom, hogy akkor, midőn az  $n$  elem ezen permutációit alkotjuk, tulajdonképpen nem teszünk egyebet, mint-hogy  $n$  elem közül  $k$  elemet minden lehető módon kiválasztunk, azaz  $n$  elemből a  $k$ -ad osztályú kombinációkat alkotjuk meg.

Ha ugyanis az  $n$  elemből egy permutáció-csoportot akarunk alkotni, akkor csakis a  $k$  megegyező elemet kell bizonyos módon elhelyeznünk az  $n$  hely közül  $k$  helyen, azaz e megegyező elemek mindegyikének valamely rendszámot kell adnunk 1-től  $n$ -ig, s a többi üresen maradt helyet kell a többi, egymással megegyező  $n-k$  elemmel kitölteni; tehát a permutáció-csoport megalkotásánál az egyedüli combinatorikus művelet, a melyet végeznünk kellett: az  $n$  sorszám közül  $k$  sorszám kiválasztása, vagyis a *permutációk megalkotása és az  $n$  szám (elem) közül a  $k$ -ad osztályú kombináció-csoportok megalkotása egy és ugyanaz a művelet.*

Ha az  $n$  elem közül  $k_1$  számú elem egymás között,  $k_2$  ismét egymás közt és éppen így  $k_3, k_4 \dots k_q$  megegyezik, a hol tehát:

$$k_1 + k_2 + \dots + k_q = n,$$

akkor a permutációk száma:



$$P = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_q!}.$$

Ez a szám átalakítható a következőképpen:

$$P = \frac{n!}{k_1! (n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2! (n-k_1-k_2)!} \dots \frac{[n-(k_1+k_2+\dots+k_{q-2})]!}{k_{q-1}! k_q!}.$$

Ha az  $n$  elemből alkotható  $k$ -ad osztályú kombinációk számára a szokásos  $C_k^{(n)}$  jelet használjuk, akkor

$$P = C_{k_1}^{(n)} \cdot C_{k_2}^{(n-k_1)} \dots C_{k_{q-1}}^{[n-(k_1+\dots+k_{q-2})]}. \quad 1)$$

E két szám megegyezése éppen olyan egyszerűen földeríthető, mint az előbbi esetben. Ha ugyanis a szóban forgó  $n$  elem valamely permutációját kell megalkotnunk, akkor első dolgunk, hogy kijelöljük az első  $k_1$  elem helyét a sorban, vagyis az első  $k_1$  elem mindegyikének az  $1, 2, \dots, n$  számok közül egy-egy rendszámot adjunk. Az első  $k_1$  elem mindössze  $C_{k_1}^{(n)}$  helyzetben lehet. Most elhelyezzük a következő  $k_2$  elemet az üresen álló  $n-k_1$  helyre. Ezek az elemek  $C_{k_2}^{(n-k_1)}$  különböző elhelyezést engednek; ez után pedig az üres helyeken elhelyezzük a következő  $k_3$  elemet a lehető módokon, melyek száma  $C_{k_3}^{n-(k_1+k_2)}$  s i. t.; tehát az összes csoportok száma tényleg az 1) alatti szám. Az általános esetben sem teszünk tehát egyebet a permutációk megalkotásánál, minthogy az  $n$  sor-szám  $k_1$ -edosztályú, az  $n-k_1$  megmaradó sorszám  $k_2$ -edosztályú stb. kombinációit alkotjuk meg.

*Beke Manó.*



## A PARTITIO NUMERORUM IRODALMA.\*

(Első közlemény.)

Mindama kérdéseket, a melyek az egész számoknak összeadandókra való felbontására vonatkoznak, EULER *partitio numerorum* névvel jelölte. E feladatok tárgyalása tulajdonképen a számelméletnek az egész számoknak tényezőkre való bontását is megelőző, elemibb fokát képezi. Mig azonban a tényezőkre való bontás kérdései legnagyobb részt elemi módon tárgyalhatók, a *partitio numerorum* tárgyalásában elejétől fogva analitikai módszereket alkalmaztak. E körülmény az önmagában is elég fontos kérdés tárgyalását a számelmélet egyik legérdekesebb fejezetévé teszi.

A mi a *partitio numerorum* alkalmazását illeti, az invariáns-elmélet CAYLEY- és SYLVESTER-féle, úgynevezett összeszámoló módszerének az idevonatkozó kifejtések annyira lényeges alkotó részét képezik, hogy CAYLEY, SYLVESTER és mások egyenesen ezért foglalkoztak a *partitio numerorum*mal.

Az idetartozó kérdések két részre oszthatók. Ú. m.: 1. A lehetséges felbontások számának meghatározása. 2. A lehetséges *partitio* felbontások előállítás. Az eddigi vizsgálatok majdnem kizárólagosan a kérdés első részére vonatkoznak.

---

\* E dolgozat első részét képezi egy közlemény-sorozatnak, melynek egyes részei: 1. A *partitio numerorum*ra vonatkozó eddigi vizsgálatok eredményeinek áttekintő összefoglalásával; 2. A *partitio numerorum* továbbvitelével; 3. Az invariáns-elmélet CAYLEY-SYLVESTER-féle módszerének, és a *partitio numerorum* ebben való alkalmazásának összefoglaló ismertetésével; 4. Az invariáns-elmélet ez ágának a *partitio numerorum* alkalmazásán alapuló kiégésztésével foglalkoznak.



Jelen dolgozat célja röviden áttekinteni a *partitio numerorum* irodalmát, és megállapítani a kérdés mai állását. Az áttekintésnél egyrészt annak kimutatása fog vezető elvül szolgálni, hogy az ide tartozó kérdések egyetlen közös típusra vezethetők vissza, másrészt pedig annak megállapítása, hogy ezen alaptípus megoldását mennyire viszi előbbre az eddigi irodalom. Ez az összefoglaló áttekintés a mellett, hogy a kérdés némi továbbvitelét tartalmazó külön dolgozatnak szolgál kiinduló pontul, tekintve a *partitio numerorum* meglehetősen töredékes irodalmát, az idevonatkozó adatok lehetőleg részletes összeállítása szempontjából sem lesz érdektelen munka.

## I.

EULER \* bizonyos végtelen szorzatoknak és raczionális törtnek hatványsorba való kifejtésével foglalkozott, hol a kifejtésnél végzett analitikai műveletek természetéből az együttthatóknak bizonyos arithmetikai jelentése következik. A tőle tárgyalt főbb kérdések a következők:

## 1. Az

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\dots$$

végtelen szorzat kifejtésében  $x^n z^m$  együttthatója mutatja, hogy az  $n$  számot hányféleképen lehet előállítani  $m$  különböző pozitív szám összege gyanánt.

## 2. Az

$$\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)\dots}$$

végtelen szorzat kifejtésében  $x^n z^m$  együttthatója pedig mutatja, hogy az  $n$  szám hányféleképen állitható elő  $m$  egyenlő vagy különböző pozitív szám összege gyanánt.

---

\* «Introductio in analysin infinitorum» t. I. cap. 16. «De partitione numerorum». Ugyancsak: «De part. num.». Nov. Comment. Petrop. III. 1750—51. és Comment. Arithm. Collectæ. t. I.



3. Az

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^2z)\dots(1-x^kz)}$$

raczionális tört kifejtésében  $x^n z^m$  együtthatója azt jelenti, hogy az  $n$  számot hányféleképp lehet a

$$0, 1, 2, \dots, k$$

számok sorából vett  $m$  *egyenlő vagy különböző* szám összege gyanánt előállítani. Ugyan e szám azt is jelenti, hogy az

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_k &= m \\ 1x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k &= n \end{aligned}$$

határozatlan egyenletrendszernek hány nem negatív egész számú megoldása van.

4. Az

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots$$

végtelen szorzat kifejtésében  $x^n$  együtthatója azt jelenti, hogy az  $n$  számot hányféleképp lehet előállítani *bárhány különböző* pozitív szám összege gyanánt.

5. Az

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots}$$

végtelen szorzat kifejtésében  $x^n$  együtthatója azt jelenti, hogy az  $n$  számot hányféleképp lehet előállítani *bárhány egyenlő vagy különböző* pozitív szám összege gyanánt.

Lehet ugyan e körben általánosabb feladatokat is kijelölni, a mint már EULER-nél is találjuk, például az

$$(1+x_1z)(1+x_2z)(1+x_3z)\dots$$

és az

$$\frac{1}{(1-x_1z)(1-x_2z)(1-x_3z)\dots}$$

végtelen szorzatok kifejtésének arithmetikai értelmezése, de e feladatok ilyen általánosságban nem nyújtanak a további tárgyalásra alkalmas anyagot.



Most már kimutatható, hogy a felsorolt feladatok a következő közös típusra vezethetők. Ha

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

pozitív egész számok, akkor az

$$\frac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2})\dots(1-x^{a_n})}$$

raczionális törtfüggvény sorba való kifejtésénél  $x^M$  együtthatója azt a számot jelenti, mely megmutatja, hogy az  $M$  számot az  $a_1, a_2, \dots, a_n$  számokból hányféleképpen lehet additív módon előállítani, ha az egyes elemeket többször is felhasználhatjuk. Ugyan e szám úgy is értelmezhető, mint az

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = M$$

határozatlan egyenlet nem negatív egész számokban való megoldásainak száma.

Legyen ugyanis az 1. alatti végtelen szorzat kifejtett alakja

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\dots = 1 + P_1z + P_2z^2 + \dots, \quad (1)$$

hol  $P_1, P_2, P_3, \dots$  stb. az  $x$  függvényei. Írjunk itt  $z$  helyébe  $xz$ -t, akkor előáll:

$$(1+x^2z)(1+x^3z)\dots = 1 + P_1xz + P_2x^2z^2 + \dots \quad (2)$$

Az (1) és (2)-ből:

$$(1+xz)[1 + P_1xz + P_2x^2z^2 + \dots] = 1 + P_1z + P_2z^2 + \dots \quad (3)$$

Innen a  $z$  egyenlő hatványainak összehasonlításából:

$$\begin{aligned} (P_1+1)x &= P_1 \\ (P_2+P_1)x^2 &= P_2 \\ &\dots \\ (P_m+P_{m-1})x^m &= P_m. \end{aligned}$$

Vagy

$$\begin{aligned} x &= P_1(1-x) \\ P_1x^2 &= P_2(1-x^2) \\ &\dots \\ P_{m-1}x^m &= P_m(1-x^m). \end{aligned}$$



Ezekből pedig szorzás útján :

$$x^{\frac{m(m+1)}{2}} = P_m (1-x) (1-x^2) \dots (1-x^m).$$

Vagyis

$$P_m = \frac{x^{\frac{m(m+1)}{2}}}{(1-x) (1-x^2) \dots (1-x^m)}. \quad (4)$$

E szerint  $x^n z^m$  együtthatója

$$(1+xz) (1+x^2z) (1+x^3z) \dots$$

kifejtésében egyenlő  $x^n$  együtthatójával  $P_m$  kifejtésében, vagy

$$x^{n - \frac{m(m+1)}{2}}$$

együtthatójával az

$$F_m = \frac{1}{(1-x) (1-x^2) \dots (1-x^m)} \quad (5)$$

kifejtésében.\* Elég tehát ez utóbbi racionális tört kifejtését megvizsgálni.

Legyen továbbá a 2. alatti végtelen szorzat kifejtett alakja

$$\frac{1}{(1-xz) (1-x^2z) (1-x^3z) \dots} = 1 + Q_1 z + Q_2 z^2 + \dots, \quad (6)$$

hol  $Q_1, Q_2, \dots$  stb. az  $x$  függvényei. Írjunk  $z$  helyébe  $xz$ -t, akkor előll

$$\frac{1}{(1-x^2z) (1-x^3z) (1-x^4z) \dots} = 1 + Q_1 xz + Q_2 x^2 z^2 + \dots \quad (7)$$

A (6) és (7)-ből:

$$(1-xz) [1 + Q_1 z + Q_2 z^2 + \dots] = 1 + Q_1 xz + Q_2 x^2 z^2 + \dots \quad (8)$$

Innen a  $z$  egyenlő hatványainak összehasonlításából:

$$\begin{aligned} Q_1 - x &= Q_1 x \\ Q_2 - Q_1 x &= Q_2 x^2 \\ \cdot &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ Q_m - Q_{m-1} x &= Q_m x^m. \end{aligned}$$

\* EULER, «Intr. in an. inf.» C. 16.



Vagy

$$\begin{aligned} Q_1(1-x) &= x \\ Q_2(1-x^2) &= Q_1x \\ \cdot &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ Q_m(1-x^m) &= Q_{m-1}x. \end{aligned}$$

Ezekből szorzás útján

$$Q_m(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m) = x^m.$$

Vagyis

$$Q_m = \frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)}. \quad (9)$$

E szerint  $x^n z^m$  együtthatója

$$\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)\dots}$$

kifejtésében egyenlő  $x^n$  együtthatójával  $Q_m$  kifejtésében, vagy

együtthatójával

$$F_m = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)}$$

kifejtésében.\* Itt is elég tehát az utóbbi raczionális tört kifejtését megvizsgálni.

Vége legyen a 3. alatti raczionális tört kifejtett alakja :

$$\frac{1}{(1-x)(1-xz)(1-x^2z)\dots(1-x^kz)} = 1 + R_1z + R_2z^2 + \dots, \quad (10)$$

hol  $R_1, R_2, \dots$  stb. az  $x$  függvényei. Írjunk itt is  $z$  helyébe  $xz$ -t, akkor előáll :

$$\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)\dots(1-x^{k-1}z)} = 1 + R_1xz + R_2x^2z^2 + \dots \quad (11)$$

A (10) és (11)-ből :

$$\begin{aligned} (1-z)[1 + R_1z + R_2z^2 + \dots] &= \\ &= (1-x^{k-1}z)[1 + R_1xz + R_2x^2z^2 + \dots]. \end{aligned} \quad (12)$$

\* EULER, «Introd. in an. inf.» C. 16.



Innen a  $z$  egyenlő hatványainak összehasonlításából:

$$\begin{aligned} R_1 - 1 &= x(R_1 - x^k) \\ R_2 - R_1 &= x^2(R_2 - x^k R_1) \\ &\dots \\ R_m - R_{m-1} &= x^m(R_m - x^k R_{m-1}). \end{aligned}$$

Vagy

$$\begin{aligned} R_1(1-x) &= (1-x^{k+1}) \\ R_2(1-x^2) &= R_1(1-x^{k+2}) \\ &\dots \\ R_m(1-x^m) &= R_{m-1}(1-x^{k+m}). \end{aligned}$$

Ezekből szorzás útján:

$$R_m(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m) = (1-x^{k+1})(1-x^{k+2})\dots(1-x^{k+m}).$$

Vagyis

$$R_m = \frac{(1-x^{k+1})(1-x^{k+2})\dots(1-x^{k+m})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)}. \quad (13)$$

E szerint  $x^n z^m$  együtthatója

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)\dots(1-x^k z)}$$

kifejtésében egyenlő  $x^n$  együtthatójával

$$\frac{(1-x^{k+1})(1-x^{k+2})\dots(1-x^{k+m})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)}$$

kifejtésében.\*

E kifejezés további átalakítása végett a következő véges szorzatból indulhatunk ki. Legyen

$$(1+xz)(1+x^2 z)\dots(1+x^m z) = 1 + S_1 z + S_2 z^2 + \dots + S_m z^m \quad (14)$$

hol  $S_1, S_2, \dots$  stb. az  $x$  egész kifejezései. Írjunk  $z$  helyébe  $xz$ -t, akkor előáll:

$$\begin{aligned} (1+x^2 z)(1+x^3 z)\dots(1+x^{m+1} z) &= \\ &= 1 + S_1 xz + S_2 x^2 z^2 + \dots + S_m x^m z^m. \end{aligned} \quad (15)$$

\* EULER, «Introd. in an. inf.» C. 16.







és így  $x^n z^m$  együtthatója

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)\dots(1-x^k z)}$$

kifejtésében, vagyis  $x^n$  együtthatója  $R_m$  kifejtésében annyi, mint:

$$\sum_{r=0}^m \left\{ (-1)^r \text{ coeffs } x^{n - \left( kr + \frac{r(r+1)}{2} \right)} \right\}$$

$$\text{in } \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^r)(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{m-r})} \}^* \quad (20)$$

Elég tehát itt a következő típus kifejtésével foglalkoznunk:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^r)(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{m-r})}$$

hol

$$0 \leq r \leq m.$$

A 4. és 5. alatti végtelen szorzatoknál, ú. m.:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots$$

és

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots}$$

a kifejtés együtthatóinak meghatározására már önálló és elég egyszerű redukció-képletek ismeretesek, a melyekről alább fogunk szólni. Mindamellettt célszerű ezeknél is megállapítani a kijelölt alaptípussal való összefüggést. Ez a következőkép történhetik.

Mivel az (1) és (6) szerinti

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\dots = 1 + P_1 z + P_2 z^2 + \dots$$

és

$$\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)\dots} = 1 + Q_1 z + Q_2 z^2 + \dots$$

kifejtések mindig lehetségesek az

$$\begin{aligned} |x| &< 1 \\ |z| &\leq 1 \end{aligned}$$

\* V. Ö. CAYLEY: «Researches on the Partition of Numbers». Phil. Trans. CXLV. 1855. Collected Math. Papers. Vol. II.







$$\begin{array}{l}
 x^n \text{ együtthatójával } Q_1\text{-ben} + \\
 + x^n \quad \quad \quad \text{''} \quad \quad \quad Q_2\text{-ben} + \\
 + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
 \end{array}$$

Mivel  $Q_m = x^m F_m$ , tehát a kérdéses szám

$$\begin{array}{l}
 = x^{n-1} \text{ együtthatója } F_1\text{-ben} + \\
 + x^{n-2} \quad \quad \quad \text{''} \quad \quad \quad F_2\text{-ben} + \\
 + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
 + x^0 \quad \quad \quad \text{''} \quad \quad \quad F_n\text{-ben.}
 \end{array}$$

E feladatok megoldása is visszavezethető, tehát az

$$F_m = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^m)}$$

alakú racionális törtek kifejtésére.

Ezzel ki van mutatva, hogy a *partitio numerorum* kijelölt főbb kérdései részint az

$$F_m(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)} \quad (23)$$

részint pedig az

$$F_{m,r}(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^r)(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{m-r})}$$

racionális törtek kifejtésére vezethetők vissza. Legyen  $F_m(x)$  kifejtése:

$$F_m(x) = \varphi_m(0) + \varphi_m(1)x^1 + \varphi_m(2)x^2 + \dots \quad (25)$$

továbbá  $F_{m,r}(x)$  kifejtése:

$$F_{m,r}(x) = \varphi_{m,r}(0) + \varphi_{m,r}(1)x^1 + \varphi_{m,r}(2)x^2 + \dots \quad (26)$$

akkor úgy  $\varphi_m$  mint  $\varphi_{m,r}$  számára igen egyszerű redukció-képletek állapíthatók meg.

Ugyanis az

$$(1-x^m)F_m(x) = F_{m-1}(x)$$

függvényösszefüggésből következik, hogy

$$\varphi_m(M) = \varphi_m(M-m) + \varphi_{m-1}(M). \quad (27)$$



Épűgy az

$$F_{m-1, r}(x) = (1 - x^{m-r}) F_{m, r}(x)$$

$$F_{m-1, r-1}(x) = (1 - x^r) F_{m, r}(x)$$

$$F_{m, r}(x) = F_{m, m-r}(x)$$

fűggvényösszfűggésekből kővetkezik, hogy

$$\varphi_{m, r}(M) = \varphi_{m, r}(M - (m - r)) + \varphi_{m-1, r}(M) \quad (28)$$

$$\varphi_{m, r}(M) = \varphi_{m, r}(M - r) + \varphi_{m-1, r-1}(M) \quad (29)$$

$$\varphi_{m, r}(M) = \varphi_{m, m-r}(M). \quad (30)$$

Mindezen redukzió-képletek arra szolgálhatnak, hogy velűk  $\varphi_m(M)$  illetve  $\varphi_{m, r}(M)$  számára *számtáblázatok* készítsűnk, a mint az elsőre nézve EULER tényleg cselekedte is.

Azonban a redukzió-képletek nem nyűjtanak fogalmat a kérdéses kifejezések belső szerkezetéről, és általános tárgyalásokra nem alkalmasak. Ezért a partitio numerorum összes kérdéseire nézve nagyjelentőségű feladatnak látszik, hogy a  $\varphi_m(M)$  és  $\varphi_{m, r}(M)$  általános analitikai kifejezéseit meg legyenek állapítva. E végett legczűlszerűbb a kővetkezű általánosabb tipussal foglalkozni, mely mind a két kérdést, mint specziális esetet magában foglalja :

Meghatározandó az

$$\frac{1}{(1 - x^{a_1})(1 - x^{a_2}) \dots (1 - x^{a_n})}$$

raczióális tört kifejtésében  $x^M$  egyűththatójának expliczit analitikai kifejezése.

E típus tárgyalása annál fontosabb, mert ki lehet mutatni, hogy a legáltalánosabb kettűs particziók kérdése, vagyis az

$$\frac{1}{(1 - x^{a_1}y^{b_1})(1 - x^{a_2}y^{b_2}) \dots (1 - x^{a_n}y^{b_n})}$$

raczióális tört kifejtése is erre a feladatra vezethetű vissza.\*

A kővetkezűekben meg fogjuk vizsgálni, hogy az irodalom többi

---

\* V. Ő. CAYLEY: «On a Problem of double Partitions». Phil. Mag. XX. Collected Math. Papers. vol. IV.



része mennyiben viszi előre a kijelölt alaptípus általános megoldását.

Most azonban még teljesség kedvéért röviden összeállítjuk ama végtelen-szorzat kifejtéseket is, melyek szintén a *partitio numerorum* körébe tartoznak, és szintén meg van a megfelelő arithmetikai jelentésök, de a kifejtés együtthatói már expliczit és rendesen igen egyszerű alakban vannak megadva. Ezek a következők:

EULER \* bizonyította be, hogy

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i x^{\frac{3i^2+i}{2}}. \quad (31)$$

Ennek alapján pedig a következő nevezetes tételt mutatta ki. Ha  $S(m)$  jelenti az  $m$  osztói összegét, akkor

$$S(n) = \sum_k (-1)^{k-1} S\left(n - \frac{3k^2+k}{2}\right) + S\left(n - \frac{3k^2+k}{2}\right) \quad (32)$$

hol az összeadás kiterjed  $k$  minden pozitív értékére, melyekre nézve az  $S$  argumentuma nem negatív, és  $S(0)$ , mely csak akkor fordul elő, ha  $n$  pentagonális szám, jelenti épen e pentagonális számot.

Ugyancsak e kifejtés alapján a már tárgyalt

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots}$$

végtelen szorzat kifejtési együtthatói számára redukczió-képletet lehet előállítani. Ha ugyanis

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots} = \Gamma(0) + \Gamma(1)x^1 + \Gamma(2)x^2 + \dots \quad (33)$$

akkor \*\*

$$\Gamma(n) = \sum_k (-1)^{k-1} \left\{ \Gamma\left(n - \frac{3k^2+k}{2}\right) + \Gamma\left(n - \frac{3k^2+k}{2}\right) \right\} \quad (34)$$

\* «*Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum*». Nov. Comm. Petr. V. vagy Comm. Ar. Coll. I.

\*\* ZELLER, «*Zu Euler's Recursionsformel für die Divisorensummen*». Acta Math. Bd. 4.



hol  $k$  értékei, mint előbb, és  $\Gamma(0)$  értéke, mely csak akkor lép fel, ha  $n$  pentagonális szám, egyenlő 1-el.

Végre ugyancsak ezek alapján az osztók számának meghatározására a következő kifejezés nyerhető: \*

$$S(m) = \sum_i (-1)^{i-1} \frac{3i^2+i}{2} \Gamma\left(m - \frac{3i^2+i}{2}\right) \quad (35)$$

hol  $i$  olyan pozitív értékeket vehet fel, hogy  $\Gamma$  argumentuma ne legyen negatív.

Tekintve, hogy a megelőző tárgyalások szerint a  $\Gamma(n)$  együtt-hatók  $\varphi_m(M)$ -féle értékekkel fejezhetők ki, e megjegyzés az  $S(m)$ -re nézve is érvényes.

Érdekes kifejtés továbbá a következő is, mely JACOBI-tól \*\* származik:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-x^n}{1+x^n} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^{k^2}. \quad (36)$$

Ennek tekintetbe vételével a már szintén tárgyalt:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots$$

végtelen szorzat kifejtésének együtthatói számára redukciós-formula állítható el. Ha ugyanis

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+x^n) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} C(m) x^m \quad (37)$$

és

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} C'(m) x^m \quad (38)$$

hol  $C'(m)$  már EULER képlete (31) szerint ismeretes érték, akkor

$$C(m) + 2 \sum_k (-1)^k C(m-k^2) = C'(m) \quad (39)$$

hol  $k$  olyan pozitív szám lehet, hogy  $m-k^2$  pozitív vagy zérus legyen.

\* STERN, «Eine Bemerkung über Divisorensummen». Acta Math. Bd. 5.

\*\* «Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum».



Érdekes kifejtéseket még GAUSS \* szolgáltatott :

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1-x^{2m}}{1-x^{2m-1}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^{\frac{k(k+1)}{2}} \quad (40)$$

és JACOBI \*\*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^3 = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i (2i+1) x^{\frac{i^2+i}{2}}, \quad (41)$$

melyből következtetés vonható bizonyos számoknak három négyzetszám összegére való felbontására nézve.

Az analitikai tárgyalások számelméleti tételek megállapítására való alkalmazásának egyik legszebb eredménye végre JACOBI-nak \*\* az elliptikus függvények alkalmazásával kimutatott azon nevezetes tétele, hogy minden szám felbontható négy egyenlő vagy különböző négyzetszám összegére, melyek közt zérus is előfordulhat.

Az itt felsorolt összes kifejtéseknek, illetve függvényösszefüggéseknek egy-egy arithmetikai fogalom, illetve egy-egy arithmetikai tétel felel meg, melyek BACHMANN \*\*\* könyvében részletesen össze vannak állítva.

*Csorba György.*

\* «Summatio quarundam serierum singularium». Werke. Bd. II.

\*\* «Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum».

\*\*\* «Zahlentheorie». II. Theil. 2. Abschnitt. «Zerfällung der Zahlen in Summanden».



## A HATVÁNYSOROK ELMÉLETÉHEZ.\*

A hatványsorok az összetartási kör kerületén általában még az összetartásnak ama szükséges (de magában elégtelen) feltételét sem elégítik ki, hogy a tagok minden határon túl kisebbedjenek. De ha e feltétel ki van elégítve, akkor e körülményből figyelemre méltó következtetéseket vonhatunk. Célom erre vonatkozólag két igen egyszerű tételt bebizonyítani.

I. Ha a  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  sor az összetartási kör kerületén levő  $x$  helyeken kielégíti a

$$\lim_{n=\infty} a_n x^n = 0$$

feltételt, akkor azon analitikai függvény, melynek e sor egyik elemét ábrázolja, a mondott körön legalább egy lényeges szinguláris helylyel vagy pedig legalább egy elágazási helylyel bír.

A tétel bebizonyítására czélszerűbb azt következőleg fogalmaznunk.

Ha valamely  $f(x)$  analitikai függvénynek a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{1}$$

függvényelem összetartási körének kerületén levő szingularitásai mindannyian pólusok, akkor e kör kerületén levő  $x$  helyeken

$$\lim_{n=\infty} c_n x^n$$

nem lehet zérus.

---

\* Előadatott a math. és phys. társulat 1899 november hó 9-én tartott ülésén.



Valóban, ha  $f(x)$ -nek a mondott körön nincs más szingularitása, mint egy egyszerű pólusa, akkor  $f(x)$  ily alakban írható:

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{C}{1 - \frac{x}{a}}, \quad (2)$$

hol  $a$  az illető polus,  $C$  egy zérustól különböző állandó,  $\varphi(x)$  pedig oly analitikai függvény, mely a szóban forgó —  $R = |a|$  sugarú — kör belsejében és területén szabályosan viselkedik.

E  $\varphi(x)$ -et sorba fejtven, a nyert

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n \quad (3)$$

sor az  $R = |a|$  sugarú körön levő  $x$  helyeken összetartó. Tehát e kör bármely  $x$  helyén

$$\lim_{n=\infty} \gamma_n x^n = 0. \quad (4)$$

Ellenben

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n \quad (5)$$

tagjai ugyanott abszolút értékre nézve az egységgel egyenlők.

Minthogy az (1) alatti sor tagjait úgy kapjuk, hogy a (3) alatti sor tagjaihoz rendre hozzáadjuk az (5) alatti sor tagjainak  $C$ -szere-sét, azért a vizsgált körön

$$\lim_{n=\infty} |c_n x^n| = \lim_{n=\infty} \left| \gamma_n x^n + C \left(\frac{x}{a}\right)^n \right| = |C| > 0. \quad (6)$$

Ezzel egy pólus esetére állításunk helyessége be van bizonyítva.

Ha  $f(x)$ -nek a  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  elem összetartási körén több pólusa van, akkor legyenek ezek rendre

$$a, a_1, a_2, \dots, a_r,$$

hol a többszörös pólusok multiplicitásuknak megfelelőleg vannak felsorolva. Továbbá legyen rövidség kedvéért



$$\begin{aligned} g(x) &= (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_r) = \\ &= x^r + p_1x^{r-1} + p_2x^{r-2} + \dots + p_r. \end{aligned} \quad (7)$$

Hogy az  $R = |a|$  sugarú körön most sem lehet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n x^n$$

a zérussal egyenlő, azt következőleg láthatjuk be.

Ha ugyanis a mondott kör kerületén levő  $x$  helyekre nézve az (1) alatti sor tagjai minden határon túl kisebbednének, akkor ugyanez állana az

$$x^r f(x), p_1 x^{r-1} f(x), \dots, p_r f(x)$$

függvényeknek  $x$  hatványai szerint való kifejtéséről is, valamint ezeknek összegéről  $f(x)g(x)$ -ről. De ez az előbbieket szerint lehetetlen, mert e sornak összetartási köre  $|a|$  sugarú, és  $f(x)g(x)$ -nek e kör kerületén nincs más szingularitása, mint az  $a$  egyszerű pólus.

1. példa. A

$$1. (1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (8)$$

hatványsor összetartási körének sugara  $R=1$ .

E körön levő  $x$  helyeken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1} = 0.$$

Tehát  $1. (1+x)$ -nek az egységkörön levő egyetlen szinguláris helye, t. i.  $x=-1$ , nem lehet pólus. Valóban e hely elágazási hely.

2. példa. Legyen adva a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{a^n}}{a^n} \quad (9)$$

sor, hol  $a$  az egységnél nagyobb pozitív egész szám.

Az összetartási kör sugarának megállapítására az adott sor helyett célszerűbb a differenciálás által keletkezett

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{a^n-1}$$



sort vizsgálni. Ha ebben  $|x| > 1$ , akkor a tagok minden határon túl növekednek. Ha ellenben  $|x| < 1$ , akkor a tagok abszolút értékre nézve rendre kisebbek a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x|^{n-1}$$

összetartó sor tagjainál. Tehát e sorra nézve, s vele együtt a (9) alattira nézve is,  $R=1$ .

Ha  $|x| = 1$ , akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n} = 0,$$

tehát a (9) alatti sor oly függvényt ábrázol, melynek az egységkörön legalább egy lényeges szingularitása, vagy legalább egy elágazási helye van.

Tényleg ismeretes,\* hogy az egységkör minden pontja lényeges szinguláris hely.

II. Ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (10)$$

az összetartási kör kerületén levő  $x$  helyeken kielégíti a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x^n = 0$$

eltételt, akkor a kétszeri vagy többszöri integrálás után nyert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}, \quad \dots \quad (11)$$

sorok összetartási körüknek kerületén feltétlenül összetartók.

Ismeretes, hogy e sorok összetartási köre ugyanaz, mint az eredeti soré. Legyen e közös összetartási körnek sugara  $R$ . Hogy e körön felvett  $x$  helyekre nézve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x^n = 0,$$

---

\* V. ö. STECKEL, Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. CRELLE Journal, 112. köt.



az következõleg is fejezhetõ ki :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| R^n = 0. \quad (12)$$

Ámde akkor létezik egy oly véges  $G$  szám, hogy  $n$  minden értékénél

$$|a_n| R^n < G. \quad (13)$$

Tehát  $x$  szóban forgó értékeinél

$$\left| \frac{a_n x^{n+k}}{(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+k)} \right| < \frac{GR^k}{(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+k)} < \frac{GR^k}{(n+1)(n+2)}.$$

Vagyis a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+k}}{(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+k)} \quad (14)$$

sor tagjai abszolút értékre nézve rendre kisebbek mint

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{GR^k}{(n+1)(n+2)} \quad (15)$$

megfelelõ tagjai. Ez utóbbi sor összetartó és összege  $GR^k$ , tehát a (14) alatti sor a szóban forgó körön valóban feltétlenül összetartó. A (11) alatti sorok pedig nem egyebek, mint a (14) alattinak speciális esetei, ha  $k = 2, 3, \dots$

Mintfog következtetéseink nem a (12) alatti egyenleten, hanem csak a (13) alatti egyenlõtlenségen alapulnak, azért a bebizonyított tétel következõleg általánosítható :

Ha valamely  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  sor az összetartási kör kerületén levõ  $x$  helyeken kielégíti az összetartás ama szükséges (de magában elégtelen) feltételét, hogy a tagok abszolút értéke egy véges határ alatt maradjon, akkor a sor kétszeri vagy többszöri integrálása után nyert sorok az összetartási kör kerületén feltétlenül összetartók.

Kürschák József.

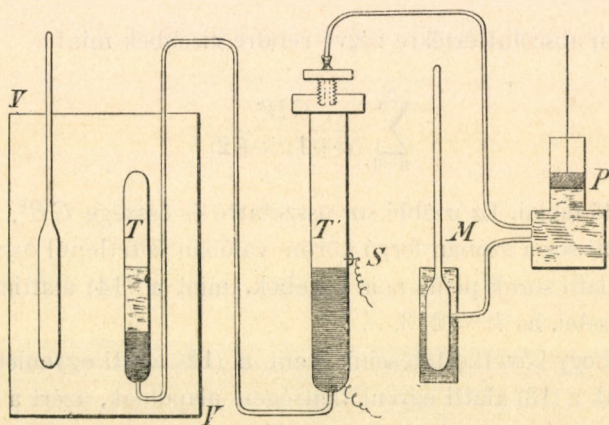


## A TESTEK HALMAZÁLLAPOTAIRÓL.

(Második közlemény.)

### 7. §. A Cailletet-Colardeau-féle módszer.

CAILLETET és COLARDEAU a telített gőz nyomásának megfigyeléséből határozták meg a kritikus állandókat.\* Az alapgondolat azon megfigyelés volt, hogy a folyadék gőzének nyomása a kritikus hőmérsékletig mindig ugyanazon törvény szerint változik, bármi is a



16. ábra.

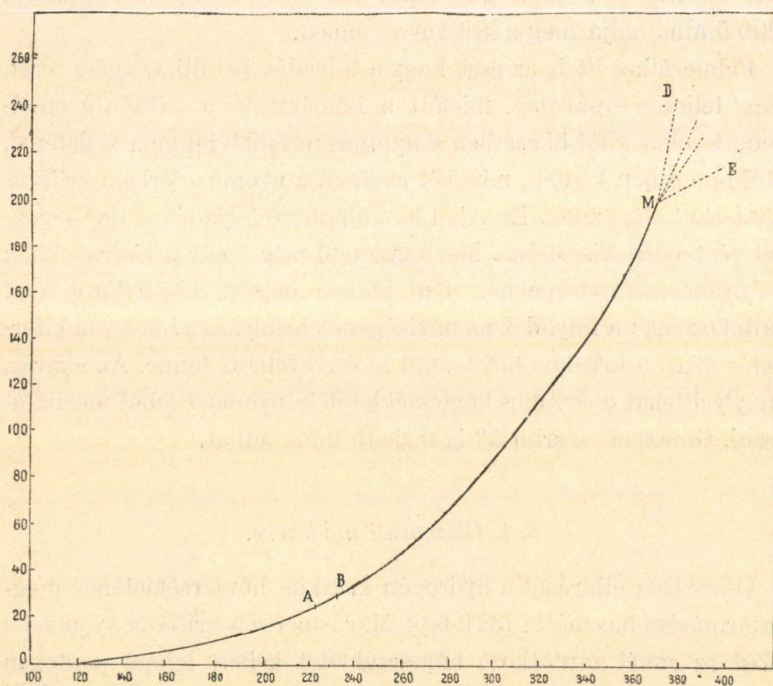
folyadék kezdeti mennyisége, ezen a ponton felül azonban már függ a folyadék mennyiségétől.

Eljárásukat a vízre alkalmazták (16. ábra). A vizet a *T* aczélcsőbe tették, melynek kb. 20 cm hossza, 15 mm belső átmérője

\* C. R. CXII. pag. 1170; 1891. — Journ. phys. (2) X. pag. 233; 1891. — M. Ph. L. I. pag. 265; 1892.



és 5 mm falvastagsága volt; a vizet alul higany zárta el, felette légüres tér volt. A csövet  $V$ -ben melegítették, nátrium és káliumnitrát egyenlő arányú keverékében, a mely keverék forráspontja  $400^{\circ}\text{C}$ -on felül van. A hőmérsékletet egy lég- és két higanythermometerrel mérték, melyek  $400^{\circ}\text{C}$  körül levő hőmérsékletek mérésére voltak berendezve. A nyomásnak, melyet a vízgőz kifejt, mérése úgy történik, hogy a  $T$  cső vékony aczélcső által a szintén



17. ábra.

acél  $T'$  csővel volt összekötve,  $T'$  pedig  $P$  légszivattyúval s a komprimált hydrogénnel töltött  $M$  manometerrel közlekedhetett; a  $T$  csőben fellépő nyomás így áthaladhat  $M$  manometerre. Hogy a kísérlet alatt a víznek s a gőznek térfogata állandó maradjon,  $T'$  falába az izolált  $S$  platindrót van beolvasztva s a mint a nyomás következtében a  $T'$ -ben levő higany emelkedése közben eléri  $S$ -et, egy elektromos csengő szólal meg. Ekkor  $P$  szivattyút lassan mű-



ködésbe hozzuk s a higanyt addig tereljük vissza, a míg a csengetés elhallgat.

A kapott eredmények graphikus ábrázolásából (17. ábra) az látszik, hogy a vízgőz maximális feszítő erejének görbéje  $223^{\circ}$ -tól  $230^{\circ}$ -ig megegyezik azzal, melyet REGNAULT kapott; kb.  $365^{\circ}$ -ig a különböző kísérletsorozatok görbéi összeesnek, ezentúl azonban már szétválnak, a mint a használt folyadék mennyisége különbözött. A kritikus hőmérséklet tehát  $365^{\circ}\text{C}$  s ezen pont ordinátája (200·5 atm.) adja meg a kritikus nyomást.

Felmerülhet itt is az eset, hogy a folyadék betölti az egész teret, vagy teljesen elpárolog, mielőtt a hőmérséklet a kritikussig emelkedett volna. Előbbi esetben a nyomás nagyobb lenne a kelleténél, utóbbi esetben kisebb, mindkét esetben a nyomás-görbe a kritikus pont előtt elágaznék. Ez okból is, különböző folyadékmennyiségekkel végzendők kísérletek. Megjegyzendő még, hogy a kísérletekben a folyadékmennyiségeknek nem szabad nagyon tág határok közt váltakozniok; a folyadék mennyiségének befolyása a hőokozta kiterjedés miatt a kritikus hőfok alatt is észrevehető lenne. Az eljárás, melylyel tehát a kritikus hőmérsékletet és nyomást lehet meghatározni, GRIMALDI szerint  $5^{\circ}$ -ig terjedő hibát adhat.

#### 8. §. *Olszewski módszere.*

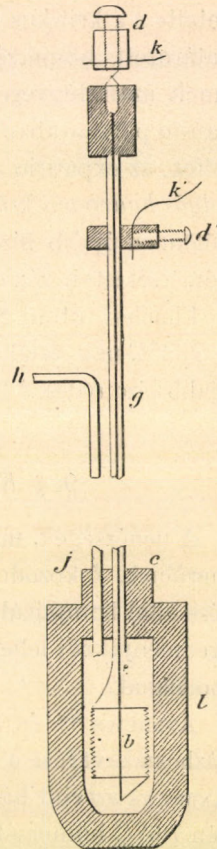
OLSZEWSKI eljárását a hidrogén kritikus hőmérsékletének meghatározására használta (321. lap). Már ismerte a kritikus nyomást s most az ennél mutatózó hőmérsékletet kellett lehető pontosan meghatározni. A nehézségek nagyok voltak, mert a hőelektromos oszlop az itt fellépő igen alacsony hőmérsékletnél nem elég érzékeny; továbbá a kritikus állapotot jelző felforrás csak néhány pillanatig tart s ez az idő nem elég arra, hogy a hőelektromos oszlop a környező gáz hőmérsékletét felvegye. Ezért a platinadrót elektromos ellenállásának a hőmérséklettel való változását vette alapul a hőmérő szerkesztésénél. A hőmérő-anyagul szolgáló 0·025 mm átmérőjű platinadrót minden szigetelő burkolat nélkül a *b* ebonit keretre van felcsavarva (18. ábra) oly módon, hogy a menetek



egymástól 0.5—1 mm távolságra vannak; az egész egy belül üres tokot alkotott. A platinadrót egyik vége a  $g$  vörösréz csőhöz, másik vége a  $g$ -be erősített  $e$  vörösréz dróthoz van forrasztva. Az elektromos teleppel való összeköttetés úgy létesül, hogy  $e$  felülről  $d$  csavarral,  $g$  pedig  $d'$  csavarral van ellátva, a honnan  $k$  és  $k'$  drótok segélyével az eszközt egy WHEATSTONE hidba kapcsoljuk be. Az áramot egy Leclanché elem adta, melyet még 1000 ohm bekapcsolásával gyöngített, úgy hogy az áram melegítő hatása lehetőleg el volt kerülve. A  $b$  dróttekeres az  $i j$  aczél edényben volt, melybe  $h$  csövön át a 170 atm. nyomás alatt levő hydrogen ömlött;  $i j$  edény alsó része folyékony oxygenbe merült, melynek hőmérséklete  $-210^{\circ}C$  volt; az edényben  $b$  körül volt még egy igen vékony falú üvegcső, melynek rendeltetése az volt, hogy a felforrás pillanatában megvédje  $b$ -t az edény falának melegítő hatásától. Minthogy így a valódi hőmérsékletet meghamisítható befolyások lehetőleg ki voltak küszöbölve, a platinatekereset pedig a hydrogen minden oldalról körülvetve, a platinathermometer adatai valóban a hydrogen hőmérsékletét adták meg.

A platinathermometer adatait hydrogen-thermometer adataival hasonlította össze. Azt találta, hogy  $-200^{\circ}C$ -ig a platinadrót ellenállása a hőmérséklettel majdnem lineárisan változott, s így valószínű, hogy a hátralevő kis hőmérsékleti közben, hol az értékeket extrapolációval határozta meg, az így nyert hőmérsékletek igen nagy közelítéssel a valódi hőmérsékleteknek fognak megfelelni.

A kísérletnél a hydrogent, midőn az  $i j$  edényben felvette a környező oxygen hőmérsékletét, lassú expansiónak vetette alá s 20 atm. nyomásnál megfigyelte a hőmérsékletet.



18. ábra.



E szerint a *hydrogén kritikus hőmérséklete* —  $234.5^{\circ}\text{C}$ .

Kísérletét megismételte oxygénnel, melynek kritikus nyomása és hőmérséklete már ismeretes volt s megegyezést talált a régi eredményekkel. A mennyiben a folyós oxygén kb.  $16^{\circ}$ -al volt a kritikusnál magasabb hőmérsékleten, midőn az expansiónak alávetette s a kritikus nyomás pillanatában mégis a más úton is meghatározott hőmérsékletet vette fel, megegyeztet az eljárás ellen emelt azon lényeges kifogást, hogy a *hydrogégáz*, mely az expansio pillanatában magasabb hőmérsékleten van, mint a kritikus hőfok, az expansio alatt nem vesz fel oly hőmérsékletet, mely a *folyós hydrogén* kritikus hőmérsékletével egyenlő. Ez az eredmény különben újabb bizonyíték gyanánt is tekinthető, hogy a kritikus hőmérsékleten gáz és folyadék teljesen egygyé olvadnak.

Elméleti uton NATANSON a hydrogén kritikus hőmérsékletét —  $232^{\circ}\text{C}$ -nak találta, a mi OLSZEWSKI methodusának helyességére újabb bizonyíték.\*

#### 9. §. Keverésekre vonatkozó vizsgálatok.

A nehézségek, melyek az egyes anyagok kritikus állandóinál felmerülnek, fokozódnak, a hol a viszonyok különböző testek keverése által komplikáltabbak lesznek. E téren inkább csak qualitativ eredményekről lehet beszámolni, ezek is részben egymásnak ellentmondanak.

ANDREWS\*\* és CAILLETET\*\*\* megfigyelései szerint indifferens gázhozza keverése a kritikus hőmérsékletet tetemesen leszállítja; így ANDREWS szerint három térfogat széndioxyd és négy térfogat nitrogén  $7.6^{\circ}\text{C}$  hőmérsékleten még  $283.9$  atm. nyomás alatt sem folyósodik, bár a tiszta széndioxyd folyósítása ezen hőmérsékleten  $42.5$  atm. nyomás alatt beáll; CAILLETET pedig azt találta, hogy öt térfogat széndioxyd és egy térfogat levegő kritikus hőmérséklete  $21^{\circ}\text{C}$ .

\* M. P. L. IV. pag. 298; 1895.

\*\* Phil. Mag. (5) I. pag. 78; 1876. — Phil. Trans CLXXVIII. A. pag. 45 1887.

\*\*\* Journ. phys. (1) IX. pag. 192; 1880.



Csökkenést talált a kritikus hőmérsékletnél HANNAY<sup>1</sup> is, bár az ő kísérletei szerint a hidrogénnek és nitrogénnek széndisulfidhoz való keverése csak néhány fokkal csökkenti a hőmérsékletet, ép ily hatású a methylalkohollal való keverés; a kritikus nyomás azonban kétszeresére, háromszorosára emelkedik. KUENEN;<sup>2</sup> újabb kísérletei szerint nehezen sűrithető, tehát alacsony kritikus hőmérsékletű gáz hozzákeverése a kritikus hőmérsékletet csökkenti, a kritikus nyomást emeli; ha azonban a hozzákevert gáz könnyen kondenzálható, a keverék kritikus hőmérséklete és nyomása emelkedik. Nem alkalmazható a szabály oly esetben, midőn a két anyag kritikus hőmérséklete egymáshoz közel áll; itt előre nem lehet megmondani, hogy melyik eset fog bekövetkezni.

Ha valamely folyadékban szilárd anyagot oldunk fel, a kritikus hőmérséklet emelkedik; érdekes, hogy, ha most a folyadékot a nyomás és hőmérséklet emelése által folytonos módon, gázállapotba viszzsűk át, a szilárd anyag a gázban is feloldott állapotban marad.<sup>3</sup>

Sokkal kevesebb számmal történtek még ezen jelenségekre nézve kísérletek, hogy a nehéz kérdésben valami határozott quantitativ eredményhez, vagy valami szabályosság felismeréséhez juthattunk volna.

Nagyobb biztossággal szólhatunk azon összefüggésről, melyet folyadékkeverékek kritikus hőmérsékletére STRAUSS<sup>4</sup> állított fel; ennek értelmében, ha  $\alpha$  és  $\beta$  a két alkotórész %-os tartalma,  $\vartheta_1$  és  $\vartheta_2$  a kritikus hőmérséklete, akkor a keverék kritikus hőmérséklete:

$$\vartheta = \frac{\alpha \vartheta_1 + \beta \vartheta_2}{\alpha + \beta}.$$

Ő maga a képletet alkohol és æther, alkohol és víz keverékére alkalmazta, sőt ily módon a víz kritikus hőmérsékletét már előbb meghatározta, mint az kísérleti úton ismeretes lett volna s azt

<sup>1</sup> Winkelmann, Physik II, 2. pag. 668.

<sup>2</sup> Beibl. XXII. pag. 145; 1898.

<sup>3</sup> HANNAY és HOGARTH Winkelmann Physik II. 2. pag. 672. — PICTET: C. R. 1895.

<sup>4</sup> Beibl. VI. pag. 282; 1882.



$370^{\circ}C$ -nak találta; későbbi kísérletek szerint  $\theta = 365^{\circ}C$  (326. lap). Ezen szabály a levegő kritikus hőmérsékletéül  $-140.8^{\circ}C$ -t ad, a mi a kísérleti eredményekkel ( $-140^{\circ}$  és  $-141^{\circ}$  közt) igen jó megegyezés. A szabályt különben nagy számú kísérlettel PAWLEWSKI<sup>1</sup> igazolta. Más kutatók azt találták, hogy a szabály a kelleténél mindig nagyobb értéket ad,<sup>2</sup> azonban SCHMIDT ismét kiterjedt kísérleteket végzett a kérdés tisztázása végett s azt találta, hogy az eltérések az elméleti és kísérleti eredmények közt majd  $+$  majd  $-$  értelműek és egymással mindig elegendő megegyezésben vannak.<sup>3</sup>

Itt lesz helyén való, hogy azon érdekes kísérletekre utaljunk, melyeket WROBLEWSKI<sup>4</sup> a folyékony atmosphærikus levegővel végzett. Mint megjegyzni, az atmosphærikus levegő sok jelenségnél így a folyósításnál is, egyszerű gáznak látszik, pedig a gondosabb kutatások mutatják, hogy sokkal komplikáltabbak a viszonyok; minden jelenség, mely gázkeverékek folyósításánál fellép, itt is mutatkozik s az egyszerűség csak azért tűnik fel, mert az alkotórészek folyósítási feltételei közel esnek egymáshoz.

A levegővel való kísérletek talán több irányú felvilágosítást adhatnának a gázkeverékek viszonyairól.

### 10. §. Összefoglalás.

Az eddigiekben megismerkedtünk ANDREWS-nak a kritikus viszonyokra vonatkozó felfedezésével, láttuk röviden a hatást, melyet az egyrészt a testek halmazállapotaira vonatkozó nézetünkre, másrészt pedig a gázok folyósítását célzó kísérletekre gyakorolt. A nyert elvi fontosságú eredményeket fogjuk most összefoglalni.

ANDREWS felfedezésének lényege azon körülmény felderítésében áll, hogy a légnemű testekre nézve vannak oly hőmérsékletek, melyeken a kellő nyomás alkalmazásával a test folyósítható, vannak oly hőmérsékletek, melyeken bármily nagy nyomás sem ele-

<sup>1</sup> Beibl. VI. pag. 466; 1882. VII. pag. 351; 1883.

<sup>2</sup> ANSDELL, Beibl. VII. 1883. GALITZINE, Wied. Ann. XLI; 1890.

<sup>3</sup> Beibl. XVI. pag. 412; 1892.

<sup>4</sup> Wied. Ann. XXVI. pag. 134; 1885.



gendő a folyósításhoz; a határ-hőmérséklet a *kritikus hőmérséklet*, a hozzátartozó nyomás a *kritikus nyomás* s a légnemű testnek ezen két adat által meghatározott állapotjában a folyékony s a légnemű halmazállapot között folytonos átmenet lehetséges, azaz a légnemű testet a nyomás folytonos növelése mellett fokozatosan folyósíthatjuk, vagy a folyós testet a nyomás fokozatos csökkentése mellett, gradatim átvihetjük a légnemű állapotba.

Ezen felfedezésnek úgy a theoretikus, mint a praktikus irányban fontos következményei voltak.

Kitűnt u. i., hogy a folyékony és a légnemű állapot egymástól nem különbözik lényegben, hogy a folyékony és a légnemű testeket úgy foghatjuk fel, mint ugyanazon halmazállapotnak különböző formáit; a gáz sem más test, mint a gőz, csak az egyik a kritikus hőmérséklete fölött, a másik az alatt van. A nélkül, hogy most még a részletekbe bocsájtkoznánk, látjuk a nagy következményt: a testekről alkotott nézetünk egyszerűbb lett, egységesebb és általánosabb.

Nézzük a praktikus irányt, a hol az experimentumok feladata a gázoknak folyós állapotban való előállítása volt. A cél ugyan már ANDREWS előtt is ki volt tűzve, de nem volt ily tudatos és határozott, míg most az irány is ismeretes volt, a melyen haladva, biztosan meg lehetett a feladatot oldani. Tökéletesedtek az eszközök az alacsony hőmérsékletek előállítására; FARADAY két elvéhez: a hűtőkeverékek készítéséhez s az alacsony nyomás mellett végbe menő elpárologtatáshoz, újak léptek; az adiabatikus tágulás s a fokozatos lehűtés elvét alkalmazták, míg e két elv kombinációjával sikerült LINDE-nek és HAMPSON-nak a folyékony levegőt tetemes mennyiségben előállítani. Ezzel a helyes út is ki van jelölve, melyet más gázoknál is követni lehet. Az így folyósított gázok azután még alacsonyabb hőmérsékletek előállítására szolgálhattak s ez uton végre a hidrogén folyósítása is sikerülhetett.

Ezzel lehetővé van téve, hogy a testek egyes tulajdonságait igen alacsony hőmérsékletek mellett is kutassuk, a mely tér a vizsgálatok elől eddig teljesen el volt zárva.

A kritikus viszonyok kutatása egészen új kísérleti eljárásokra



és berendezésekre vezetett. Az isothermikus módszer használata ANDREWS kísérleteivel kezdődik s nyer azután több esetben alkalmazást. Említhetjük WROBLEWSKI és OLSZEWSKI nagy tökéletességgel berendezett apparátusait, melyek az egyszerű CAILLETET-féle készülékből keletkeztek s melyek legalább részben, alapul szolgálhattak DEWAR vakuumos edényeinek, melyekben a folyósított gázok elég könnyűséggel eltarthatók és felhasználhatók; OLSZEWSKI, midőn a hidrogén kritikus állandóit kutatta, új szerkezetű s igen használható hőmérőt szerkesztett.

Utaltunk már egyes hiányokra is. Első sorban áll itt azon kísérletek csekély száma, melyek a kritikus sűrűségekre vonatkoznak. Nagyon hiányosak még ismereteink a keverékekre vonatkozólag is; talán sok felvilágosítást adhatna ez irányban az atmosphaerikus levegő gondos kutatása.

Ezen részletkérdéseken kívül még egy nagy elvi momentum is eldöntetlen eddig: a szilárd és folyékony állapotok folytonosságának kérdése. Az eddigi vizsgálatok ugyan valószínűvé teszik, hogy itt is van egy kritikus pont; de az eredmények sokkal szűkebb körre vonatkoznak, sem hogy határozott felvilágosítást adhatnának. A feladat experimentális megoldása igen nehéz; annál érdekesebb lenne a keresztülvitele.

Következő feladatunk már most, hogy a testek halmazállapotaira vonatkozó kérdéseket tárgyaljuk még pedig lehetőleg feltüntetve a befolyást, melyet a kísérleti eredményekre ANDREWS felfedezése gyakorolt. Mivel e fölfedezés első sorban a halmazállapotváltozásokra vonatkozik, mi is ezzel fogjuk a tárgyalást kezdeni s azután térünk át az egyes halmazállapotok megbeszélésére. Előzetesen pedig a halmazállapotok különbségeiről szólnunk.



## II. RÉSZ.

## A halmazállapotok különbségei.

## 11. §. A három halmazállapot.

A testeknek háromféle halmazállapotát ismerjük: *a légnemű, a folyékony és a szilárd állapotot.*

A *légnemű* testeknek nincs határozott alakjuk és térfogatuk; mindkettő az illető térnek alakjától és térfogatától függ, melyben a testet tartjuk. A *folyékony* testeknek alakjuk nem határozott, térfogatuk azonban igen. A *szilárd* testeknek alakjuk is, térfogatuk is meghatározott.

Ugyanazon testnek többféle halmazállapotát ismerjük; mai tudásunk már legalább is nagyon valószínűvé teszi, hogy minden test mind a három halmazállapotban előfordulhat s csak eszközeink és eljárásaink tökéletlensége miatt nem ismerjük minden testnek mind a három halmazállapotát. A testeket egyik halmazállapotból a másikba kétféle úton vihetjük át: meleg közlése által a szilárd testből folyékony és légnemű lehet; meleg elvonása által a processust fordított rendben hajthatjuk végre. A szilárd állapotból a folyékonyba való átmenetelt *olvadásnak* nevezzük, a folyékonyból a légneműbe valót *gőzölgésnek*; a fordított átmenetek jelzésére a *fagyás*, vagy *megszilárdulás* és a *lecsapódás*, vagy *sűrűsödés* szokat használjuk.

A hőközlés, vagy hőelvonás a testeknél alak- és térfogatváltozással jár; *a légnemű testek* az alakváltoztatás ellenében csak igen kis erőt fejtenek ki, a térfogatváltoztatás ellenében nemcsak nem fejtenek ki erőt, de maguktól nagyobbítják a térfogatot; *a folyékony testek* az alakváltoztatás ellenében igen kis erőt fejtenek ki, míg a térfogatváltoztatásnak nagy erővel ellenszegülnek; *a szilárd testeknél* nagy erő szükséges úgy az alak-, mint a térfogatváltoztatáshoz.

A három halmazállapot összefüggésének kérdése a maga egészében, mint láttuk, még nincs eldöntve (302 l.). A folyékony és lég-



nemű állapotok között a folytonos átmenet lehetőségét már megtaláltuk, azaz tudjuk, hogy a folyékony testet a maga egészében, a nélkül, hogy részenként elgőzitenők, átvihetjük a légnemű állapotba, illetőleg a légnemű testet bizonyos változások egymásutánja által, a nélkül, hogy részenként megsűrítienők, folyékonytá tehetjük.

Ezt a folytonos átmenetet a szilárd és a folyékony halmazállapot között még nem lehetett kimutatni; azaz a szilárd testet csak úgy tudjuk folyékonytá változtatni, ha meleg közlése által azt részenként megolvasztjuk s az egész eljárás alatt a test egyidejűleg szilárd és folyékony állapotban fordul elő; hasonlóan a folyékony testet csak úgy vihetjük át a szilárd állapotba, ha azt hőelvonás közben részenként megszilárdítjuk s az egész processus közben a test egy része szilárd, más része folyós állapotban fordul elő.

Röviden jellemezzük az ide vonatkozó elméleti megfontolásokat. Mondtuk, hogy a testeknél az alak- és térfogatváltoztatáshoz erőket kell kifejteni. Ha a légnemű testnél az alakváltozáshoz sem szükséges erő kifejtés, *ideális légnemű testet* kapunk; az olyan folyadék, mely a térfogatváltozás ellen végtelen nagy, az alakváltozás ellen zérus erőt fejt ki, *ideális folyadék*; a szilárd test pedig, melynél mindkét hatás ellen végtelen nagy erő nyilvánul, *ideális szilárd test*. Az elméleti megfontolások ideális testekre vonatkoznak.

Az elméleti föltevés szerint a testek egymástól kis közök által elválasztott molekulákból állanak (*molekula elmélet*), melyek egymást vonzzák; a vonzó erő legnagyobb a szilárd testeknél, míg a légneműeknél számokkal alig kifejezhetően kicsiny. A molekulák igen gyors mozgásban vannak; a légnemű és folyós testeknél a molekulák helyzetváltozására nézve semmi megszorítás nincs, hanem az illető térben, melyet elfoglalnak, bármerre haladhatnak, a szilárd testeknél ellenben a molekulák útja szűk térre van szorítva. A mozgás a légnemű testeknél haladó, a szilárd testeknél egyensúlyi helyzet körül rezgő; a folyékony testeknél a rezgéshez haladó mozgás is járul.



## 12. §. A Boyle-Mariotte törvény.

A gázok és gőzök megkülönböztetésére a régi nézet szerint azon jelenség szolgált, hogy ezek folyadékká sűrithetők, azok pedig nem. (295. lap). FARADAY kutatásai után (296. lap) ezen megkülönböztetést nem lehetett fentartani s most már a különbséget a BOYLE-MARIOTTE törvénnyel fejezték ki (298. lap), s azt mondták, hogy a gázok, legalább igen nagy közelítéssel követik a törvényt, a gőzök pedig nem. Mivel azt tapasztalták, hogy a törvénytől való eltérés az egyes gáz-nemeknél, sőt ugyanazon, de különböző hőmérsékletű gáznál más és más, azt mondták: képzelhető egy olyan gázállapot, melyre a BOYLE-MARIOTTE törvény szigorúan érvényes s ezt *ideális gázállapot*-nak nevezték el; ekkor mondhatjuk, hogy a törvény érvényessége annál közelítettebb, minél jobban közeledik a gáz az ideális állapothoz.

ANDREWS vizsgálatai után ezen megkülönböztetést sem lehetett fentartani; a légnemű testeket nem oszthatjuk fel *gázokra és gőzökre*, mert csak az egyik, mondjuk a *gőznemű* állapot létezik s itt a *telített* és a *nem telített gőz*. A BOYLE-MARIOTTE törvény szerepe pedig arra redukálódott, hogy a telített gőzök egyáltalában nem engedelmesskednek a törvénynek s ez csak több-kevesebb közelítéssel a nem telített gőzökre érvényes. Ezen törvény, mely így most is bizonyos elválasztó szerepet játszik, a mi szempontunkból is elég fontos, hogy a reá vonatkozó kutatásokra bővebben kiterjeszkedjünk.

BOYLE, helyesebben tanítványa TOWNLEY, 1655-ben, MARIOTTE pedig 1676-ban jutottak azon összefüggés felismerésére, mely valamely gáz térfogata és a reá gyakorolt nyomás közt fennáll. Kísérleti eljárása mindkettőnek az volt, a mit ma is követünk: U alakú üvegső rövidebb szára felül zárt, hosszabb szára felül nyitott; a rövidebb szárba higany betöltése által, bizonyos térfogat levegőt szorítunk s ha a nyomást növeljük, a térfogat csökken.

BOYLE és MARIOTTE a levegővel kísérleteztek; rögtön vizsgálat alá kerültek más gáznemek is, a mely vizsgálatok közben kétségek is merültek fel a törvény általános érvényessége ellen. Az első vizs-



gálatok nem adtak döntő eredményt. SULZER kísérletei szerint<sup>1</sup> levegőnél 1—6 atm. nyomás közt a sűrűség gyorsabban növekedik, mint a nyomás; ezt mutatják ROBISON kísérletei is;<sup>2</sup> OERSTED és SWENDSEN kísérleteiből<sup>3</sup> ellenkezőleg az tűnt ki, hogy a száraz levegőnél 1—8 atm. közben a sűrűség és nyomás viszonya állandó maradt; a kéndioxydnál, a mint a gáz a folyósodáshoz közeledett, a sűrűség nagyobb mértékben növekedett, mint azt a törvény kívánta. Későbbi kutatások mindig határozottabban rámutattak, hogy a gázok nem követik pontosan a törvényt. DESPRETZ szerint<sup>4</sup> levegőre kb 20 atm. nyomásig érvényes a törvény, ammoniak, kénhydrogén, cyangáz már 2 atm.-nál eltérést mutatnak; ARAGO és DULONG szerint az érvényesség a levegőre 27 atm. nyomásig fennáll, POUILLET szerint pedig, ki a viszonyokat 100 atm. nyomásig kutatta, a nitrogén, oxygen, hydrogen, nitrogénoxyd és szénoxyd úgy követik a törvényt, mint a levegő, de a könnyen koércibilis gázok, kéndioxyd, ammoniak, széndioxyd, nitrogénoxydul, æthylén, methan már 3—4 atm. nyomásnál jelentékeny eltérést adnak.

Ezen kísérletekből tulajdonképen csak az vált bizonyossá, hogy a BOYLE-MARIOTTE törvény nem abszolút érvényességű; világosságot a viszonyokba először REGNAULT hozott, a ki azután pontosabb eredményeket is adott.<sup>5</sup> Kísérleti eredményei szerint a levegő, nitrogén és széndioxyd esetében az összenyomhatóság a nyomás növekedésével növekszik, a hydrogennél ellenben csökken. Más gázokkal végzett kísérletei is azt mutatták, hogy a hydrogen az összes többi gázakkal szemben ellentétes viselkedésű. Valamennyi megvizsgált gáznál azonban *az eltérés a Boyle-Mariotte törvénytől annál nagyobb, minél nagyobb a nyomás.*

Ezen eredményt NATTERER helyesbitette,<sup>6</sup> midőn megmutatta, hogy a kompressibilitás növekedésének van egy felső határa s egy

<sup>1</sup> GEHLER: Phys. Wörterb. IV. 2. pag. 1039.

<sup>2</sup> GEHLER: i. m. pag. 1039.

<sup>3</sup> GEHLER: i. m. pag. 1040.

<sup>4</sup> GEHLER: i. m. pag. 1043.

<sup>5</sup> Mém. de l'inst. XXI. pag. 329; 1847.

<sup>6</sup> Wien. Ber. V. 1850; VI. 1850; XII. 1854.



bizonyos nyomáson felül az összenyomhatóság csökken, tehát az összes gázok úgy viselkednek mind, mint a hidrogén.

A döntő kísérleteket e téren CAILLETET-nek és AMAGAT-nak köszönhetjük.

CAILLETET<sup>1</sup> a megvizsgálandó gázt egy, belülről megaranyozott capilláris csőbe vezette s higany-oszloppal elzárta alulról; a cső felső vége zárt volt. A nyomás növekedésével a higany a capillárisban emelkedett s az aranyat e közben feloldotta; a higanyoszlop magasságát így nagy pontossággal lehetett meghatározni. Megvizsgálta a levegő, nitrogén és hidrogén viselkedését s megállapította, a mire már NATTERER utalt, hogy úgy a levegőnél, mint a nitrogénnél a kompressibilitás 60 atm. nyomáson felül csökkent, tehát a két gáz úgy viselkedett, mint a hidrogén.

A kérdést tovább vizsgálta AMAGAT s kísérleteit más irányban is kiterjesztette. Az eddigi kutatások mind állandó hőmérsékletű gázokra vonatkoztak; AMAGAT vizsgálta meg először az egyes gázok isothermáit ezen szempontból s állapította meg az összefüggést, mely a BOYLE-MARIOTTE törvénytől való eltérés s a hőmérséklet változása közt fennáll.<sup>2</sup> Számos kísérletet végzett, melyeknek numerikus eredményei bő összeállításban megtalálhatók WINKELMANN kézi könyvében is.<sup>3</sup> Ezek szerint, ha a gáz nyomása  $P$ , térfogata  $V$ , akkor, a hidrogén kivételével, minden más gázra létezik az egyes hőmérsékleteknél  $PV$  számára egy minimális érték; ez a minimum azonban a különböző hőmérsékleteknél más és más nyomásnak felel meg. Különböző hőmérsékleteknél vizsgálva az egyes gázokat, a hőmérséklet emelkedésével mindegyik gáz közeledik az ideális állapothoz.  $PV$  minimális értékei magasabb hőmérsékleteknél nagyobb nyomások mellett lépnek föl és mindig jobban elmosódnak.

AMAGAT után még RAMSAY és YOUNG, továbbá BATTELLI végeztek különösen kiterjedt kutatásokat ez irányban. Az összes kutatások azt mutatták, hogy a BOYLE-MARIOTTE törvénytől való eltérés vál-

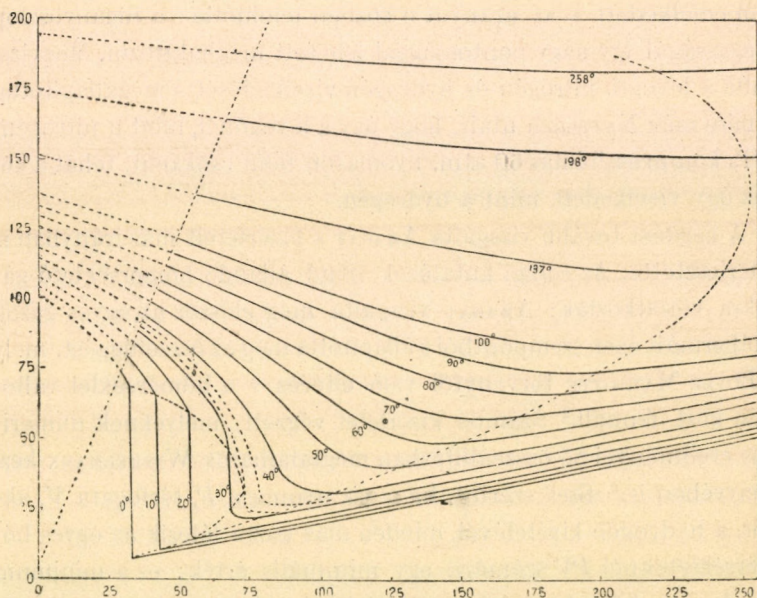
<sup>1</sup> C. R. LXX. pag. 1131; 1870. LXXXVIII. pag. 61; 1879.

<sup>2</sup> Ann. ch. ph. (6) pag. 37; 1893.

<sup>3</sup> Phys. II. 2. pag. 841. köv.



tozásai lényegben egy típusnak felelnek meg. Ismét a *széndioxydra* vonatkozó kutatásokat fogjuk alapul venni megbeszéléseinkben. A rajz (19. ábra) AMAGAT kísérleti eredményeit tünteti fel; egységekül 1 atm. nyomás s azon térfogat vétettek, a melyet 1 kgr gázalakú széndioxyd  $0^\circ$  hőmérsékletnél és 1 atm. nyomás alatt elfoglal; a rajzban az abscissák a nyomások, az ordináták pedig  $PV$  értékeit mutatják. Az egyik parabola alakú pontozott vonal a mini-



19. ábra.

mumokat köti össze, a másik,  $0^\circ$  és a kritikus hőmérséklet közt, a görbe egyenesvonalú részeit határolja.

A megrajzolt isothermákról látjuk, hogy  $0^\circ$  és  $30^\circ$  közt mind-egyik először gyengébben, aztán erősebben esik; mindegyik isothermában van egy egyenesvonalú, függőlegesen lefelé haladó rész, mely azután megtörik míg az isotherma a többi részben emelkedik. A  $30^\circ$ -on felül levő isothermák az eddigiektől annyiban különböznek, hogy bennök az egyenesvonalú rész hiányzik és minél jobban emelkedik a hőmérséklet, annál jobban ellapul a  $PV$  csökkenését és növekedését jelző konkávság.



ANDREWS kísérleteiből tudjuk, hogy a gázok s a telítetlen gőzök lényegileg nem különbözök (301. lap), amazok felül vannak azon hőmérsékleten, a melyen még folyósíthatók, ezek pedig azon alul. Ezen eredményre gondolva, a viszonyokat következőleg foglalhatjuk össze.

A széndioxyd kritikus hőmérséklete kerekszámban  $31^{\circ}\text{C}$ , ezen alul tehát nem telített gőz, mely a nyomás növelése által telített állapotba hozható s folyósítható: a vertikális egyenesek jelzik a folyósítás processusát; látjuk továbbá a görbék alakjaiból, hogy minél jobban közeledik a gáz a folyósításhoz,  $PV$  görbülete, tehát a BOYLE-MARIOTTE törvénytől való eltérés is, annál nagyobb. *A telített gőzre nem érvényes a törvény.* A kritikus hőmérsékleten felül a gázt a nyomás növelése által nem tehetjük telítetté, itt az isothermákból eltűnik a vertikális egyenes rész, továbbá minél jobban távozunk a kritikus hőmérséklettől, a görbék görbülete annál kisebb, tehát a gáz annál kevésbé tér el a BOYLE-MARIOTTE törvénytől. *A nem telített széndioxyd-gőzre tehát törvényünk nem érvényes teljes szigorúsággal és pedig a törvénytől való eltérés annál nagyobb, minél jobban közeledik a gőz a telítettséghez.*

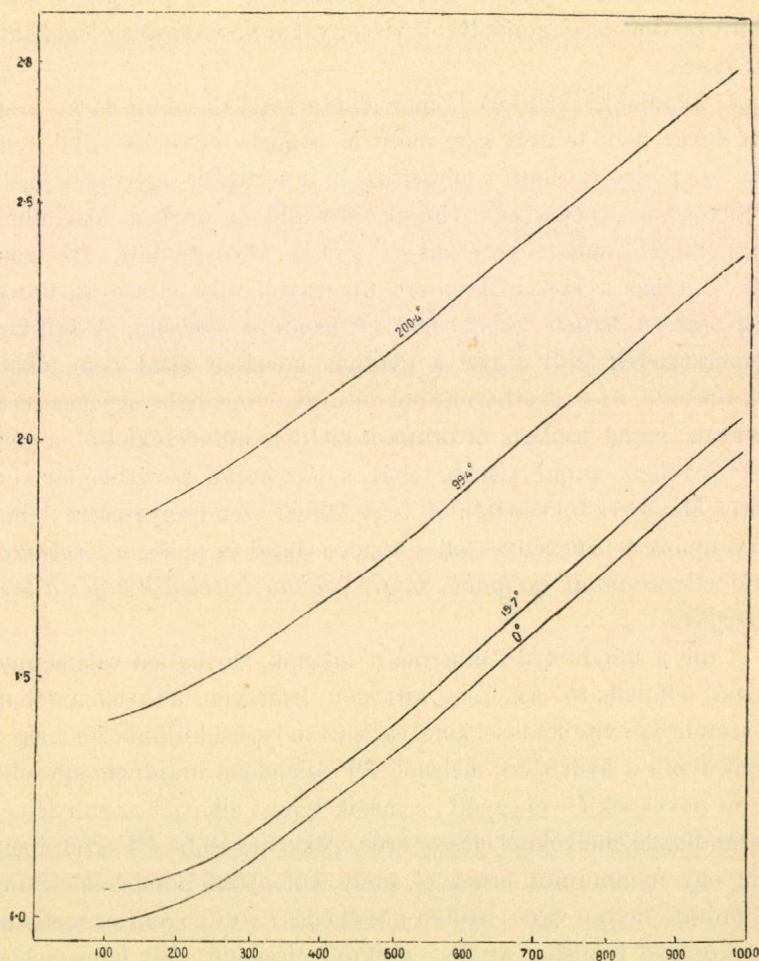
A mit a széndioxyd isothermáin láttunk, lényegben valamennyi gáznál feltalálható. AMAGAT a nitrogén, hydrogén, æthylén, methan és széndioxyd viselkedését kutatva, három typust különböztet meg;\* egyik typus a hydrogén, melynél  $PV$  állandóan majdnem egyenletesen növekszik  $P$ -vel együtt; a másik typust alkotják az æthylén és a széndioxyd, melyeknél először erős csökkenés áll be  $PV$  értékeiben, míg egy minimumot érnek el, mely különböző hőmérsékleteknél különböző helyen van s azután növekedés; a nitrogént és methant egy középső typusba sorolja; ezeknél elegendő mély hőmérsékleteknél szintén vannak minimumok, bár kevésbé élesek.

Az eddigi kísérletekből legalább utalhatunk egy körülményre, mely a viszonyokat egyszerűsíthetné. A mellékelt (20—21) ábrák a levegőnek s a hydrogénnek isothermáit tüntetik fel; a számadatok,

\* Ann. ch. ph. (5) XXII. pag. 353; 1881.



melyek alapján a rajzok készültek, WINKELMANN idézett munkájában találhatók.

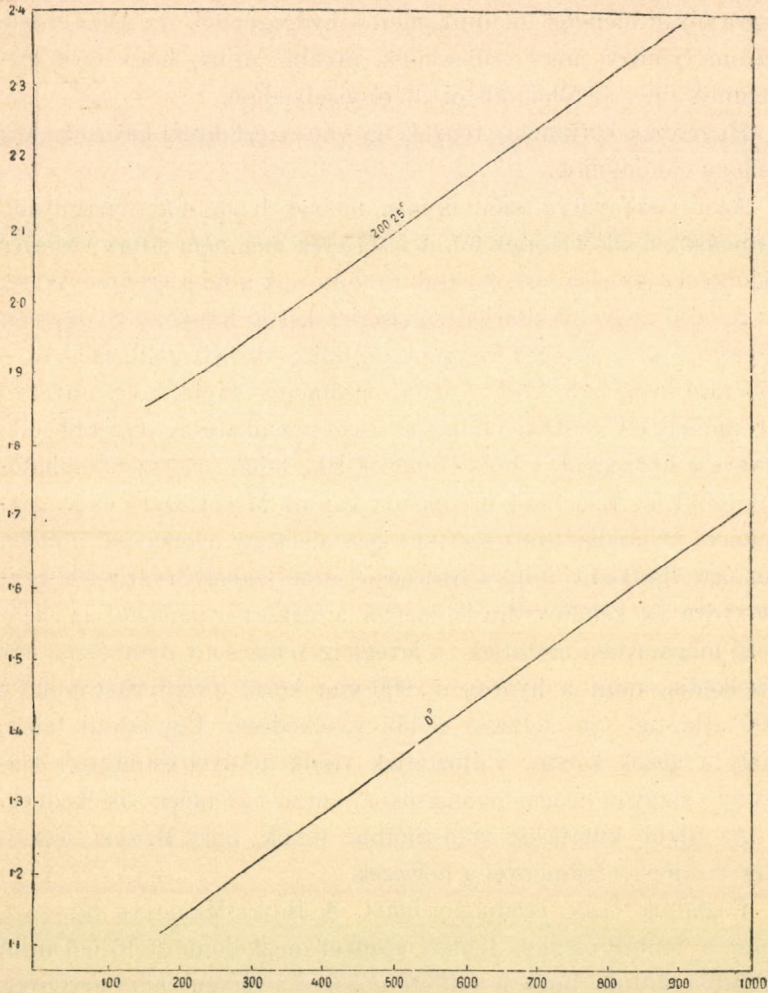


20. ábra.

A levegő isothermái közül (20. ábra) a 0°-ú s a 17.5°-ú még világosan feltüntetik  $PV$  kezdetbeli csökkenését; a 99.4°-ú isotherma görbülete jóval csekélyebb s a 200.4°-ú isotherma már alig különböztethető meg az egyenes vonaltól. Ugyanezen körülményt látjuk



fokozottabb mértékben a hidrogén isothermáinál (21. ábra); alig van görbületük. Visszagondolva a széndioxyd isothermáira (386. lap,



21. ábra.

19. ábra), lehet arra utalni, hogy az isothermák görbülete, minél jobban távozunk a kritikus hőmérséklettől, annál gyöngébb s a hidrogén számára nem kell azért külön typust felállítani, mert



isothermái majdnem egyenes vonalak. Sőt inkább a többi gázak viselkedése azon gondolatra vihet, hogy ezeknél is, elegendő messze távozva a kritikus hőmérséklettől az isothermákban kezdettől fogva olyan menetet találunk, mint a hydrogénnél. Az AMAGAT-féle három típusra nincs szükségünk, inkább látjuk, hogy egyik lég-nemnek sincs az általánostól eltérő viselkedése.

Hogy ezen körülmény tényleg így van-e, ezt direkt kísérleteknek kellene eldönteniök.

Azon viszonyokrol szólunk még, melyek 1 atm.-nál alacsonyabb nyomások mellett lépnek föl. A kísérletek még nem adtak végleges eldöntést s így elég lesz, ha csak rámutatunk a főbb eredményekre.

Az első nagyobb kiterjedésű kísérleteket ez irányban SILJESTRÖM végezte,\* ki a levegőt, oxygént, széndioxydot vizsgálta meg 18—775 mm nyomások közt s azt az eredményt kapta, hogy növekvő nyomással *PV* csökken, tehát az összenyomhatóság nagyobbodik, kivéve a hydrogént, a hol *PV* növekszik, tehát az összenyomhatóság csökken. Ellenkező eredményt kaptak MENDELEJEFF és KIRPITSCHIEFF;\*\* eredményeik szerint: igen alacsony nyomásnál minden gáz úgy viselkedik, mint a hydrogén; ezen szabály érvényes a széndioxydra és kéndioxydra is, melyek a légköri nyomásnál az ellenkező magatartást mutatják; a levegő igen alacsony nyomásnál úgy viselkedik, mint a hydrogén, 600 mm körül jelváltozást mutat s 100 atm.-nál újra felveszi előbbi viselkedését. Úgy látszik tehát, hogy a gázok kétszer változtatják viselkedésüket és nagyon alacsony s nagyon magas nyomásoknál mind egyenlően viselkednek.

Az újabb kutatások valószínűbbé teszik, hogy MENDELEJEFF és KIRPITSCHIEFF eredményei a helyesek.

Foglaljuk össze eredményeinket. A BOYLE-MARIOTTE törvényt, mint a telített és nem telített gőzöket megkülönböztető jellemzőt tekintve láttuk, hogy a telített gőzökre a törvény nem érvényes, a nem telített gőzökre pedig megközelítőleg érvényes. A nem telített

\* Pogg. Ann. CLI. pag. 451, 473; 1874.

\*\* Ann. ch. (5) II. pag. 427; 1874. IX. pag. 111; 1876. — Chem. Ber. VII. pag. 1339; 1878. VIII. pag. 744; 1879.



gőzöknél az érvényesség foka annál nagyobb, minél jobban távolodunk a kritikus állapottól, illetőleg a kritikus hőmérséklet alatt a telítési pontoktól; legjobban megfelel a törvénynek a hidrogén, mindenesetre azért, mert kritikus pontja a normális kísérleti viszonyoktól igen távol van.

Még itt is nehéz, földerítetlen kérdések vannak előttünk. Hogyan viselkednek a nem telített gőzök a kritikus hőmérséklettől igen távol; milyen a hidrogén viselkedése kritikus hőmérséklete körül; hol vannak az egyes légnekemnél az említett forduló pontok: csak a fontosabb, eldöntésre váró kérdések ezek.

### A halmazállapotok változásai.

#### 13. §. *Átmenet a folyékony és légnemű állapot között. A forráspont.*

Ha a folyadékkal elegendő meleget közlünk, akkor részei elgőzölögnek. A gőzölgésnek egy más nemét is ismerjük, melynél a halmazállapotváltozás minden látható melegközlés nélkül történik: a folyadék felszínéről u. i. állandóan, minden hőmérsékletnél gőzök szállnak fel; ezt a processust *párolgás*nak nevezzük. Mivel ezen folyamatnál a test kívülről semmi meleget sem kap, a halmazállapotváltozáshoz szükséges meleget saját hőkészletéből kénytelen elvonni, a miért a párolgó testek lehűlnek. A párolgást siettetjük, ha a testet melegítjük; ekkor elérhetjük, hogy a folyadék belsejéből is gőzök fognak felszállani, a folyadék egész tömegében párolog, vagy a szokásos elnevezéssel élve: *forr*. A forrás ily módon, mint a párolgás speciális esete fogható fel. A párolgás a folyadék felszínén megy végbe, innen pedig a gőzök felszállhatnak és elkeveredhetnek a levegővel a nélkül, hogy valami nyomást le kellene győzniök, mint azt már DALTON felismerte; hogy a folyadék belsejéből szállhassanak fel gőzök, ahhoz ezeknek le kell győzni a folyadék súlyából s az atmosphaera súlyából keletkező rájuk nehezedő nyomást. *A forrásnál tehát a folyadékból kilépő gőzök nyomásának egyenlőnek kell lennie az atmosphaera nyomásával.*

A következőkben a forrás jelenségeinek tárgyalásánál két főszempontot tűzünk ki. 1. A valóságban a lég nyomása a meg-



adott; ha tehát tudni akarjuk a forrás hőmérsékletét, tudni kell, hogy *a folyadék telített gőzeinek nyomása minő összefüggésben van a hőmérséklettel?* 2. A forrás pontjának eléréséhez a testtel bizonyos meleget kell közölni; *mi az összefüggés ezen melegmennyiség és a hőmérséklet között?*

A *telített gőzök nyomásait* a különböző hőmérsékleteknél nagy pontossággal először REGNAULT mérte meg.\* Kétféle eljárást használt. Az egyiknek alapelve abban állott, hogy adott hőmérsékletű telített gőz nyomását kellett meghatározni, ismeretes lévén, hogy a telített gőz nyomása adott hőmérsékleten állandó; ezt az eljárást REGNAULT *statikus módszernek* nevezte. Másrészt egy adott nyomást a telített gőz csak bizonyos hőmérsékleten érhet el; meg kellett tehát határozni, hogy milyen hőmérsékleten ér el a gőz adott nyomást; ez volt a *dinamikus módszer*. Ezen eljárásokkal, melyek tiszta folyadékoknál teljesen megegyező eredményeket adtak, REGNAULT 29 folyadék gőzének viselkedését vizsgálta meg különböző hőmérsékleti és nyomási határok között.

ANDREWS kísérletei egy új eljárásra vezettek: *az isotherma módszerre*; ennek lényege abban áll, hogy a nem telített gőznek viselkedését kutatjuk egyes hőmérsékleteknél a BOYLE-MARIOTTE törvénnyel szemben; a mikor a gőz telítetté válik, megszűnik a törvény közelítő érvényessége s ezen pontban megmérjük a nyomást. A geometriai ábrázolásban a görbe vonal hirtelen töréssel egyenesbe megy át; a töréspontban fellépő nyomás a telített gőz nyomása (386. lap. 19. ábra). Ezen eljárást különösen RAMSAY és YOUNG, továbbá BATTELLI alkalmazták.

A nehezen folyósítható gázok nyomásgörbéit különösen WROBLEWSKI tanulmányozta a 308. lapon leírt készülékével (7. ábra); OLSZEWSKI berendezését is láttuk már (311. lap, 8. ábra.)

Hogy a gőznyomásokat a kritikus hőmérsékletig követhesse, SAJOTSCHESKI a következő készüléket használta. Két vastagfalú üvegső egy vasfoglatat által volt egymással összekötve, az egyik a végén *U* alakú lehajlással bírt; a végén mindkét cső zárt volt.

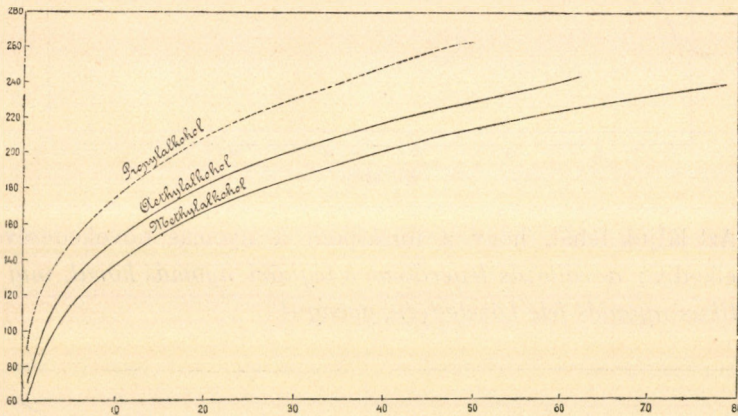
\* Mém. de l'inst. XXI. pag. 465; 1847.



Az  $U$  alakú cső végében volt a megvizsgálandó folyadék, alatta pedig higany, mely az összekötő foglalaton át a másik csőbe terjedt; az ezen csőben levő levegő szolgált a nyomás mérésére.

A számos kísérlet közül néhánynak eredményeit graphikonokon tüntettük fel, melyekről leolvashatjuk a nyomás-görbék menetének általános tulajdonságait.

Jellemzőek az alkohol nyomásgörbéi (22. ábra); látszik a görbékől, hogy a telített gőz nyomása a hőmérséklettel emelkedik, az emelkedés azonban a kritikus hőmérséklet felé mindig lassúbb



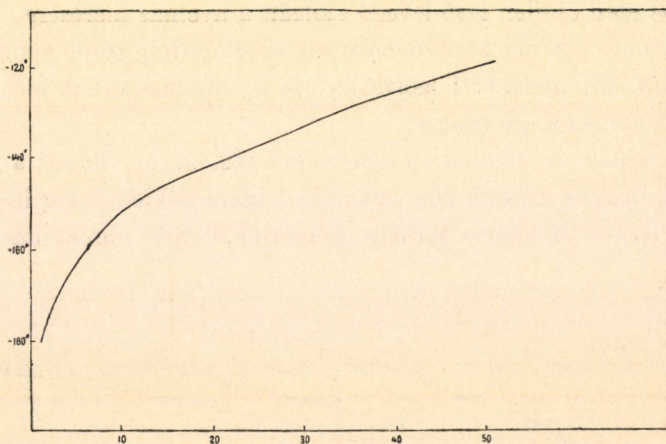
22. ábra.

lesz. A forráspont tehát a nyomás növekedésével emelkedik, míg el nem éri maximális pontját, a *kritikus pontot*. A telített gőz maximális nyomása a kritikus hőmérsékleten van s a *kritikus hőmérséklet a maximális forráspont*. A görbéken észre lehet továbbá venni, hogy az ellapulás annál nagyobb, minél alacsonyabb a kritikus hőmérséklet; az oxigén nyomásgörbéje (23. ábra) a kritikus hőmérséklet felé majdnem egyenes vonalba megy át.

Érdekes menetűek a nyomásgörbék a légköri nyomás alatt. A mellékelt rajzban (24. ábra) az abszcissák 1—10 mm és 10—80 mm nyomások feltüntetésére szolgálnak. A görbék általános jellege itt is a forráspontnak a nyomással való emelkedését mutatja; az emelkedés igen erős a légköri nyomás közelében. Az oxigén görbé-

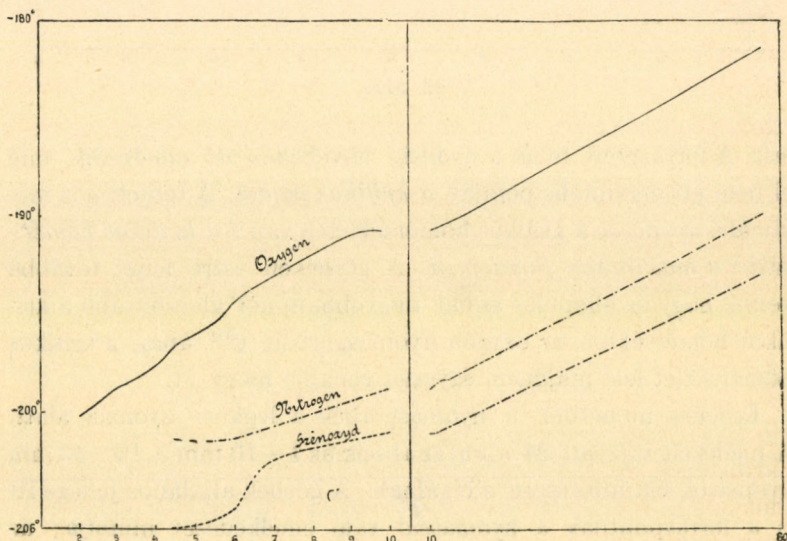


jénél látszik, hogy a forráspont emelkedése igen szabálytalanul történik.



23. ábra.

Azt látjuk tehát, hogy a forráspont a nyomás növekedésével emelkedik; a változás legerősebb a légköri nyomás körül, míg a kritikus nyomás felé közeledvén, gyengül.



24. ábra.



Egy más fontos kérdés merül föl itt: nem lehet-e a forráspontra nézve valami szabályszerűséget megállapítani; más szóval: a forráspont s a test egyéb tulajdonságai közt nem állapíthatók-e meg összefüggések?

VAN DER WAALS elméleti úton állapított meg egy ily összefüggést (l. még III. r.). Fejezzük ki u. i. a nyomást, hőmérsékletet a kritikus nyomás és hőmérséklet részeiben, vagyis, ha  $p$  a nyomás,  $t$  a hőmérséklet,  $\pi$  a krit. nyomás,  $\vartheta$  a krit. hőmérséklet, akkor:

$$p = e\pi, \quad t = m\vartheta;$$

innen:

$$e = \frac{p}{\pi}, \quad m = \frac{t}{\vartheta}$$

neveztessek *redukált nyomásnak*, ill. *hőmérsékletnek*. Ha továbbá két testnél a krit. állandók  $\pi$  és  $\vartheta$ , ill.  $\pi_1$  és  $\vartheta_1$ , a fellépő nyomások és hőmérsékletek:  $p, p_1; t, t_1$ , akkor a redukált nyomások és hőmérsékletek:

$$e = \frac{p}{\pi}, \quad m = \frac{t}{\vartheta}; \quad e_1 = \frac{p_1}{\pi_1}, \quad m_1 = \frac{t_1}{\vartheta_1};$$

azon nyomások, melyekre nézve  $e = e_1$ , *korrespondáló nyomások*, azon hőmérsékletek, melyekre nézve  $m = m_1$ , *korrespondáló hőmérsékletek*. VAN DER WAALS szerint a *korrespondáló nyomásoknak megfelelő hőmérsékletek korrespondáló hőmérsékletek*, azaz:

$$\text{ha } e = e_1, \text{ akkor } m = m_1.$$

Ezen tételt a telített gőzökre nézve úgy is lehetne kifejezni, hogy a telített gőz redukált nyomásának és hőmérsékletének viszonya független az anyagtól. Így volna egy összefüggésünk, mely a redukált forráspontokat a nyomásokból megadná, s a melyből aztán adódnanak az összefüggések az egyes anyagoknál a tényleges forrásponttal. Felvéve egy normális testet, bármely más testnél a kritikus állandók s ezen összefüggés ismeretéből tetszőleges nyomásnál ki volna számítható a hozzátartozó hőmérséklet, tehát a forráspont.



A tételt kísérletileg először YOUNG vizsgálta meg,\* ki számos anyagnál kiszámította  $\frac{e}{e_1}$  és  $\frac{m}{m_1}$  értékeit. A hányadosok egy esetben sem voltak egyenlők az egységgel és pedig, ha  $\frac{e}{e_1} = 1$ -nek tekintetett, akkor  $\frac{m}{m_1}$  értékei 0·8431 és 1·2885 közt ingadoztak; ha  $\frac{m}{m_1}$  tekintetett 1-nek, akkor  $\frac{e}{e_1}$  értékei 0·099 és 1·798 közt változtak.

Ez természetesen azt mondja, hogy a VAN DER WAALS-féle összefüggés megközelítőleg sem érvényes. Azonban a kritikus állandók kísérleti értékei ma még oly bizonytalanok, hogy az ezen alapon végzett számítások sem lehetnek nagy pontosságúak. Ezért AMAGAT más eljárást gondolt ki a kérdés megvizsgálására.\*\* A VAN DER WAALS-féle összefüggés értelmében a méréseket a redukált nyomások és hőmérsékletek szerint végezve, az így szerkesztett isothermák — *redukált isothermák* — az összes anyagoknál összeillő görbék lesznek. Ezen következtetés kísérleti megvalósításával azután kimutatta, hogy a levegő, széndioxyd és æther isothermái a megkívánható pontossággal esnek egybe, tehát a VAN DER WAALS-féle összefüggés csakugyan érvényes.

Lehetséges különben, hogy e viszonyokban a chemiai konstitúciónak is van szerepe. Ha YOUNG számításainál hasonló chemiai szerkezetű anyagokat hasonlítunk össze, normál anyagul pl. a methylalkohol véve, akkor az æthyl- és propylalkoholra nézve  $\frac{e}{e_1}$  illetve  $\frac{m}{m_1}$  alig térnek el az egységtől.

Ezen körülmény abból is kitűnik, hogy más szabályosság is felmerült e téren éppen hasonló chemiai szerkezetű testek között. A chemiában azon vegyületeket, melyek egymástól szerkezetükben csak  $CH_2$  egész számú többsel különböznek, *homolog vegyületeknek* nevezik. Ilyenek pl. methylalkohol ( $CH_4O$ ), æthylalkohol ( $C_2H_6O$ ), propylalkohol ( $C_3H_8O$ ); vagy eczetsav ( $C_2H_4O_2$ ), propionsav ( $C_3H_6O_2$ ) stb. Vannak továbbá különböző testek, melyeknek

\* Phil. Mag. (5) XXXIII. pag. 153; 1892.

\*\* Journ. phys. (3) VI. pag. 5; 1897. — M. Ph. L. VIII. pag. 43; 1899.



chémiái összetétele ugyanaz s csak más tulajdonságokban mutatnak különbségeket, mint pl. az æthylalkohol ( $C_2H_6O$ ) és a methylæther ( $C_2H_6O$ ); az ilyen testek *isomer vegyületek*, azok, a melyeknél az atomok is ugyanazon számmal lépnek föl, *metamer vegyületek* s melyeknél az atomok száma más, de az aránya ugyanaz, *polymer vegyületek*. Kísérleti úton NADEJDINE azt találta, hogy a *homolog és isomer vegyületeknél a kritikus hőmérséklet s a normális forráspont* (1 légnyomásnál fellépő forráshőmérséklet) *különbsége állandó*.\* Eredményeinek egy része:

*Homolog vegyületek.*

{	Methylalkohol	.....	$CH_4O$	$t=64.0^{\circ}C$	$\vartheta=233.0^{\circ}C$	$\vartheta-t=169.0$
{	Aethylalkohol	.....	$C_2H_6O$	78.3	234.3	156.0
{	Propylalkohol	.....	$C_3H_8O$	97.3	254.2	156.9
{	Isobutylalkohol	.....	$C_4H_{10}O$	107.2	265.0	157.8
{	Methylchlorid	.....	$CH_3Cl$	-23.7	141.5	165.2
{	Aethylchlorid	.....	$C_2H_5Cl$	12.5	182.5	170.0
{	Methylenchlorid	.....	$CH_2Cl_2$	41.1	245.2	204.1
{	Aethylenchlorid	.....	$C_2H_4Cl_2$	85.1	289.3	204.2
{	Isobutylen	.....	$C_4H_8$	-6.0	150.7	156.7
{	Isoamylen	.....	$C_5H_{10}$	35.0	191.6	156.6

*Isomer vegyületek.*

{	Aethylalkohol	.....	$C_2H_6O$	78.3	234.3	156.0
{	Methylæther	.....		-23.7	129.6	153.3
{	Propylalkohol	.....	$C_3H_8O$	97.3	254.2	156.9
{	Methylæthylæther	.....		11.5	167.7	156.2

A megegyezés általában elég jó, ha ismét arra is tekintünk, hogy a kritikus állandók kísérleti értékei  $20-30^{\circ}$ -kal, ill.  $10-15$  atm.-val különböznek egymástól.

A kérdéssel VINCENT és CHAPPUIS is foglalkoztak s azt találták, hogy ez a különbség nő a molekulák szerkezetének komplikáltságával;\*\* ez eredmény azonban nem mindig válik be. Pl. a következő sorozatban  $\vartheta-t$  határozott csökkenést mutat:

\* Exner Rep. XXIII. pag. 617, 685; 1887. Berl. Ber. 1882, II. pag. 446.

\*\* C. R. CIII. pag. 379, 1886.



Ámmoniak .....	$t = -38.5^{\circ}$	$\vartheta = 131.0^{\circ}$	$\vartheta - t = 168.5^{\circ}$
Monomethylamin .....	$-2.0$	$155.0$	$157.0$
Dimethylamin .....	$+8.0$	$163.0$	$155.0$
Trimethylamin .....	$+97.3$	$160.5$	$151.2$

Helyesebbnek bizonyult azon megállapításuk, hogy a kritikus nyomás a molekulák szerkezeti komplikáltságával csökken, míg a  $\frac{273 + \vartheta}{\pi}$  viszony ezzel növekszik. Ezt a csökkenést, illetve növekedést megtaláljuk NADEJDINE számadatainál is.

A kérdést csak további kutatásokkal lehet véglegesen eldönteni, az eddigiekből azonban mindenesetre látszik a kémiai szerkezet fontossága, a mint kritikus viszonyok lépnek föl.

A kémiai konstituczió egyenlőségéből más szabályszerűség is következne, melyet KOPP állított fel,\* mely szerint homolog sorokban minden belépő  $CH_2$  egyenlő számú fokkal változtatja meg a forráspontot. Későbbi kutatások azonban csak közelítő érvényességet találtak a szabályban. Ez kitűnik a 22. ábrából is; a háromalkohol görbe alacsony nyomásnál egyideig parallel halad, a nyomás növekedésével azonban állandóan távozik a többitől. NADEJDINE összefüggése különben e tétel kiterjesztése a maximális forráspontra, a kritikus pontra. KOPP-nak másik törvénye, mely szerint a metamer vegyületek normális forráspontjai összeesnek, még kisebb érvényességi körrel bir.

A forráspontokra még mások is állítottak fel összefüggéseket. Csak épen említjük a számos empirikus egyenletet, melyek kisebb hőmérsékleti közökben több-kevesebb közelítéssel megadják a telített gőz nyomása és hőmérséklete közt fennálló összefüggést, melyek azonban általános következtetések vonására nem használhatók.\*\* Általánosabb szempontja van DÜHRING törvényének, mely szerint, ha két folyadéknál a normális forráspontok  $\vartheta$  és  $t$ , más egyenlő nyomásnál  $\vartheta_1$  és  $t_1$ , akkor:

$$\frac{\vartheta - \vartheta_1}{t - t_1} = q$$

\* Lieb. Ann. XCVI. pag. 1; 1851.

\*\* Winkermann, Physik II. 2. pag. 725—736.



állandó szám. A tételt speciális fogalmazásban már DALTON ki-mondotta; szerinte  $q=1$ . Egyik törvény sem általános érvényű; DALTON összefüggését SCHMIDT vizsgálta meg,<sup>1</sup> mikor is kiderült, hogy egyes esetekben a légkörinél kisebb nyomásokra érvényes; az alkoholokra nem érvényes. Ugyancsak nem érvényes DALTON-nak azon törvénye sem, mely szerint a telített gőz nyomása geometriai haladványban nő, ha a hőmérséklet arithmetikai haladvány szerint emelkedik, mint azt már REGNAULT megmutatta.<sup>2</sup> Az általánosabb fogalmazású DÜHRING-féle összefüggés érvényességi köre per-sze nagyobb; általános érvényességről azonban itt sem lehet szó.<sup>3</sup> A formula érvényességét SCHUMANN vizsgálta meg számos testnél, de nem találta érvényesnek.<sup>4</sup>

RAMSAY és YOUNG is állítottak fel egy összefüggést, mely ismét, mint speciális esetet, magában foglalja DÜHRING-ét.<sup>5</sup> Ha  $t_1$  és  $t_2$  egy anyag forráspontja két különböző nyomásnál, és ugyanazon nyomásoknál a forráspontok egy másik anyag számára  $t'_1$  és  $t'_2$ , ha továbbá:

$$\frac{t_1}{t'_1} = R_1, \quad \frac{t_2}{t'_2} = R_2,$$

akkor

$$R_2 = R_1 + c(t'_2 - t'_1),$$

a hol  $c$  igen kicsiny szám. Ha  $c=0$ , akkor:

$$\frac{t_2}{t'_2} = \frac{t_1}{t'_1},$$

tehát

$$\frac{t_2 - t_1}{t'_2 - t'_1} = \frac{t_1}{t'_1} = q$$

constans.

Nem szóltunk még a *keverékeknél* föllépő viszonyokról.

Légnemű testek keverékére nézve DALTON szerint a *keverék nyomása egyenlő a részek nyomásainak összegével*. Ha tehát a

<sup>1</sup> Zeitschr. f. phys. Chem. VII. pag. 434; 1891. VIII. pag. 645; 1891.

<sup>2</sup> Mém. de l'inst. XXI; 1847. XXVI; 1862.

<sup>3</sup> DÜHRING: Neue Grundges. zur rat. Phys. und Chem. I; 1878. II; 1886.

<sup>4</sup> Wied. Ann. XII. pag. 58; 1881.

<sup>5</sup> Phil. Mag. (5) XXI. pag. 33; XXII. pag. 37; 1886.



folyadék gőzterében valami gáz van jelen, ez semmi befolyással sincs a képződő gőz nyomására. A kísérletek azonban más eredményeket adtak. Ha az idegen gáz kis mennyiségben van jelen, a DALTON-féle szabály még érvényes; azonban, ha ez nagy mennyiségben fordul elő, már eltérések merülnek föl.<sup>1</sup> A kérdést szépen megvilágították ANDREWS kutatásai,<sup>2</sup> ki a nagy nyomásoknál jelentékeny eltéréseket talált. Kísérleti eredményei azt mutatták, hogy *indifferens gáz hozzákeverése a forráspontokat jelentékenyen leszállítja*. Meg kell azonban jegyezni, hogy előfordul az ellenkező eset is, midőn tehát gáz hozzákeverése folytán emelkedik a forráspont,<sup>3</sup> a mi mutatja, hogy a kérdés még nincs biztossággal eldöntve.

Hasonlóan érvénytelen a DALTON-féle összefüggés *folyadék keverékek gőzfeszültségére* nézve. REGNAULT és MAGNUS szerint<sup>4</sup> az összes nyomás kisebb, mint a részletnyomások összege és a két részletnyomás között áll. A keverék forráspontja tehát mindig alacsonyabb, mint a magasabb forrásponttal bíró alkotó rész forráspontja, de magasabb, mint az alacsonyabb forrásponttal bíró alkotórésze. Az újabb kutatások szerint vannak esetek, mikor a keverék nyomása nagyobb, mint az alkotórészeké, és mikor kisebb.

Az általános eredmény szerint az *oldatoknál* is csökken a forráspont. Az itt föllépő kérdések szintén most vannak beható vizsgálatok alatt.<sup>5</sup>

Vannak szilárd testek, melyek hevítés folytán egyszerre a légnemű állapotba mennek át, mint pl. a graphit, melyet folyékonyan nem tudunk előállítani. Ezen átmenetet más testeknél is láthatjuk, mint pl. a jégnél, mely elpárologhat, a nélkül, hogy folyadékká lenne.

<sup>1</sup> RÉGNAULT, Mém. de l'inst. XXVI; 1862. — MAGNUS, Pogg. Ann. XXXVIII; 1836.

<sup>2</sup> Phil. Mag. (5) I. pag. 78; 1876. — Phil. Trans. CLXXVIII. A. pag. 45; 1887.

<sup>3</sup> BRAUN, Wied. Ann. XXXIV. pag. 943; 1888.

<sup>4</sup> KONÓWALOW, Wied. Ann. XIV. pag. 34, 219; 1881.

<sup>5</sup> OSTWALD, Allg. Chem. I.



Ezen elgőzítésre nézve csak RAMSAY-nak fontos eredményét említjük; \* ő u. i. kutatta, hogy a szilárd testeknek különböző nyomásnál meghatározott elgőzítési pontjuk van-e? Az eredmény azt mutatta, hogy az elgőzítési pontok épen úgy, mint a folyadékok forráspontjai is, meghatározott nyomásoknak felelnek meg.

Ismét mutatkozik ama körülmény, hogy a szilárd állapotból más állapotba való átmenetelnél a hőmérséklet és a nyomás között határozott összefüggés van.

A következő összeállítás néhány folyósított gázalakú test normális forráspontját adja.

Kéndioxyd	SO <sub>2</sub>	t=—10·08° C		
Antimonhydr.	H <sub>3</sub> Sb	—18·0		
Cyan	C <sub>2</sub> N <sub>2</sub>	—20·7		
Methylæther	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub> O	—23·65		
Chlór	Cl <sub>2</sub>	—33·6		
Ammoniak	NH <sub>3</sub>	—38·5		
Selenhydrogén	H <sub>2</sub> Se	—41·0		
Kénhydrogén	H <sub>2</sub> S	—63·5		
Szendioxyd	CO <sub>2</sub>	—80·0		
Phosphorhydr.	H <sub>3</sub> P	—85·0		
Nitrogénoxydul	N <sub>2</sub> O	—88·8		
Aethylen	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	—102·5		
Ozon	O <sub>3</sub>	—106·0		
Nitrogénoxyd	NO	—153·6		
Methan	CH <sub>4</sub>	—164·0		
Oxygén	O <sub>2</sub>	—181·4	—182·5° C	—184·0° C
Argon	A <sub>1</sub>	—186·9		
Szénoxyd	CO	—193·0		
Nitrogén	N <sub>2</sub>	—193·0	—194·4	—198·1
Hydrogén	H <sub>2</sub>	—238·0		
Levegő		—191·4		

#### 14. §. Az elgőzítési meleg.

Attérünk kitűzött kérdéseink (392. lap) másodikára: *mi az összefüggés a gőzölgési meleg és a hőmérséklet között.*

*Az elgőzítési vagy gőzölgési meleg alatt azon melegmennyisé-*

\* Chem. Ctbl. (3) XIV. pag. 737; 1883.



get értjük, mely szükséges, hogy valamely  $t^{\circ}$ -ú folyadék tömegegységét  $t^{\circ}$ -ú gőzzé változtassuk. Előfordul itt egy másik melegmennyiség, mely a kísérleteknél néha könnyebben nyerhető, az *összes meleg*; ez alatt azon melegmennyiséget értjük, mely a  $0^{\circ}$ -ú folyadék tömegegységét  $t^{\circ}$ -ú gőzzé változtatja át. Az összes meleg tehát az elgőzítési melegből, azonkívül azon melegből áll, mely a folyadék tömegegységét  $0^{\circ}$ -ról  $t^{\circ}$ -ra hevíti.

Az első pontos vizsgálat itt is REGNAULT-tól ered.\* A megelőző kutatók egymással ellenkező eredményeket nyertek; így WATT azt találta, hogy az összes meleg független a hőmérséklettől, ugyanezt nyerték CLÉMENT és DÉSORMES, míg SOUTHERN és CREIGHTON szerint ellenkezően az elgőzítési meleg az állandó. A határozott feleletet mindkét kérdésre REGNAULT kísérleteiből nyerjük.

Kísérleti eljárása, melyet azután is értékesítettek, abban állott, hogy a kazánból, melyben a folyadékot hevítette, a gőzök kigyózó csőben egy kalorimeterbe jutottak, hol  $0^{\circ}$ -ú folyadékká csapódtak le. A kísérletek azt mutatták, hogy a megvizsgált folyadékok *összes melege növekszik a hőmérséklettel*.

Eredményeit empirikus egyenletbe foglalta össze, ennek segítségével számadataiból meghatározható az elgőzítési melegnek is összefüggése a hőmérséklettel. E szerint *az elgőzítési meleg csökken a hőmérséklettel*.

Ezen nagyfontosságú eredményeket, melyek a régibb nézeteket egészen megdöntötték, az újabb kutatások is megerősítik. A kísérletek nagy része az elgőzítési és az összes meleget a normális forráspontra keresi; ha ezen eredményeket összehasonlítjuk más hőmérsékleti adatokkal, a kétféle melegváltozás úgy történik, mint azt REGNAULT megállapította. A kísérleti berendezések jórészt ugyanazon alapelven nyugszanak, mint REGNAULT eljárása.

Az újabb eszközök és eljárások közül azon eszközről szólunk, melyet JOLY készített az elgőzítési meleg meghatározására.\*\* Az eszköz — *gőzkalorimeter* — a gőzt kondenzálja s az ekkor felsza-

\* Mém. de l'inst. XXI; 1847. XXVI; 1862.

\*\* Chem. News, LIV. pag. 266; 1886. Beibl. XI. pag. 762; 1886.



baduló meleget valami test felmelegítésére használja. Ezt a  $p$  grmsúlyú és  $t_1^\circ$ -ú testet egy mérleg egyik karjára akasztva egyensúlyozza s aztán körülveszi pl. 1 légköri nyomású és  $t_2^\circ$ -ú gőzzel, mely gőz a test felszínén addig kondensálódik, míg annak hőmérséklete is  $t_2^\circ$ -ú lesz. Ha az ezen melegítés alatt lecsapódott gőz mennyisége  $q$ , az elgőzítési meleg  $\lambda$ , akkor a lecsapódás közben  $q\lambda$  meleg lett szabad, mely a  $p$  súlyú test hőmérsékletét  $(t_2 - t_1)^\circ$ -al növelte. Ha a test fajmelege  $s$ , akkor:

$$ps(t_2 - t_1) = q\lambda \quad \text{és} \quad \lambda = \frac{ps(t_2 - t_1)}{q}.$$

A kísérleti eljárást mindjárt BUNSEN javításaival ismertetjük meg.<sup>1</sup> A test platinahálóban lóg, a háló alatt kis platinacsésze függ, mely a lecsapódott gőzt gyűjti egybe; a háló és a csésze egy hengerbe nyúlnak, mely felül fődve van, a gőzt a henger alsó végénél vezetik be s hogy a felesleges vízgőz eltávozzék; a henger felső oldalán levő cső egy kéménybe nyulik, melyben gázlánggal elegendő légáramlást lehet előállítani. A kísérletnél előbb a test súlyát kell meghatározni, azután a platinakosarat, mialatt a gőztérben van, tárazzuk, gyorsan beléteszszük a testet s a kondensált víz súlyát megmérjük. Az eszköz igen használhatónak bizonyult.

Más módon használja fel az elgőzítésnél fellépő meleget NEESEN az ő gőzkaloriméterénél;<sup>2</sup> két egymással kapilláris cső által közlekedő zárt edény ugyanazon folyadékot tartalmazza; a kapillárisban is van egy, a két edényt elválasztó folyadékcső. Ha az egyik edényt egy helyen melegítjük, akkor a folyadék elgőzölög, a fejlődő gőz térfogatnagobbodást idéz elő s az elválasztó csőpp a kapillárisban eltolódik; az eltolódás nagysága szolgál mértékül az elgőzítéshez szükséges melegmennyiség meghatározására.

A nehezen folyósítható gázoknál FAVRE és SILBERMANN, továbbá MATHIAS módszereiről szölkünk.

FAVRE és SILBERMANN<sup>3</sup> a folyósított gázt a légköri nyomás alatt

<sup>1</sup> Wied. Ann. XXXI. pag. 1; 1887.

<sup>2</sup> Wied. Ann. XXXIX. pag. 131; 1890.

<sup>3</sup> Ann. ch. pl. (5) I. pag. 209; 1874.



szabadon elpárologtatták egy kalorimeterben. Megfigyelték a kalorimeter hőmérsékletének csökkenését s megmérték az elpárolgott gáz mennyiségét, ezen adatokból közvetlenül megkapták az elgőzítési meleget.

MATHIAS \* a folyósított gázt egy vörösréz hengerbe zárta, mely egy manometerrel s egy csapon át a szabad levegővel volt összekötve. Az edényt kalorimeterbe tette s thermikus izolálását úgy érte el, hogy czelluloid köpönyeggel vette körül. A kísérlet kezdetén az edény el van zárva; miután megmérte a kalorimeter  $t$  hőmérsékletét, összeköti az edényt a manometerrel s megméri a  $p$  nyomást. Most kinyitja kissé a csapot s megméri a most jelentkező  $p - \varepsilon$  nyomást. A hőmérséklet csökkenését úgy ellensúlyozza, hogy a kalorimeterbe kénsavat csöpögtet oly mennyiségben, hogy a hőmérséklet állandó maradjon. Ha most a csapot bezárja, a nyomás  $p - \varepsilon'$  lesz s a kalorimeter hőmérséklete  $t'$ ;  $\varepsilon - \varepsilon'$  ismeretéből REGNAULT tábláinak segítségével meghatározható  $t - t'$ , mely soha sem nagyobb  $0.3^\circ$ -nál. Ha a kénsav által a készülékbe vitt meleg, levonva belőle a készülék állandóját,  $Q$ , az elgőzített folyadék súlya  $P$ , akkor az elgőzítési meleg  $t^\circ$ -nál:  $\lambda_t = \frac{Q}{P}$ .

A kísérletek kéndioxyddal, széndioxyddal és nitrogénioxydullal történtek; kísérleti eredményei alapján MATHIAS empirikus egyenleteket állított fel, melyek az elméleti megfontolásokkal jól összevágó eredményeket adtak. Különösen fontos a vizsgálatok azon része, mely az elgőzítési melegnek változását a kritikus hőmérsékletig kutatja.

Az elmélet szempontjából, mivel a kritikus hőmérsékletnél megszűnik a különbség a folyadék és gőz között, az átmenethez nem is szükséges meleg; tehát *az elgőzítési meleg a kritikus hőmérsékleten zérus*. Ezen következtetés kísérleti verifikálását MATHIAS adta meg; hirtelen csökkenés mutatkozott az elgőzítési meleg nagyságában, midőn a hőmérséklet a kritikushoz közeledett. A következő összeállításban  $t$  a hőfokot,  $r$  az elgőzítési meleget jelenti.

\* C. R. CVI. pag. 146; 1888. — Journ. phys. (2) IX. pag. 449; 1890.



*Szendioxyd.*

$t$	$r$	$t$	$r$
0°	56·25 cal.	26·23°	22·50 cal.
7·25	50·26	28·13	19·35
13·69	42·02	29·85	14·40
16·45	40·35	30·59	7·26
22·04	31·80	30·82	3·72

*Nitrogénóxydul.*

$t$	$r$	$t$	$r$
5·27°	54·45 cal.	28·98°	23·6 cal.
10·00	52·30	31·47	20·9
18·50	43·65	34·94	0·0
26·20	29·60		

Ezen eredmények meggyőzően bizonyítják az elmélet helyességét és más eredmények helyességére is közvetett igazolásul szolgálhatnak. STEFAN\* azt kapta, hogy az elgőzítés sebessége nő a hőmérséklettel, a mennyiben ezzel a folyadék gőzeinek nyomása nő. Ha  $p$  a megfigyelés hőmérsékletéhez tartozó maximális gőznyomás,  $P$  a légnyomás, mely alatt a folyadék elgőzölög, akkor a sebesség arányos  $\log \frac{P}{P-p}$ -vel. SCHALL\*\* szerint az elgőzítés melege arányos az elgőzítés idejével.

Ezekből a kritikus pontra következik, hogy ott az elgőzítés ideje zérus, vagyis a mint a kísérlet is mutatja, ott a folyadék rögtön átmegy a gőzállapotba. Másrészt itt, mint minden forráspontnál,  $p=P$ , tehát STEFAN szerint az elgőzítés sebessége végtelen nagy.

15. §. *Átmenet a szilárd és folyékony állapot között.*

Midőn a testet hőközléssel a szilárd állapotból a folyékonyba visszszük át, a testet *megolvasztjuk*. Az olvadás jelenségénél, analog a gőzölgéshez, az *olvadás hőmérséklete* és az *olvadás melege* érdekel első sorban. Az *olvadás pontjának* azon hőmérsékletet nevezzük, melynél a szilárd állapotban levő test folyósodni kezd; az olvadás proczessushoz bizonyos idő szükséges, a mi alatt a test

\* Carl. Rep. IX. pag. 405; 1873.

\*\* Ber. Chem. Ges. XVII. pag. 1044, 1058, 2199; 1884.



heterogén állapotban fordul elő: egy része szilárdan, másik része folyékonyan s az egész proczessus alatt a hőmérséklet állandó marad. Az olvadás tehát ép úgy, mint a gőzölgés általában, nem folytonos átmenet. Ha a megolvadt testtől meleget elvonunk, átmegy a szilárd állapotba; ezen megszilárdulásnál azonban elérhetjük, hogy a testet fagyáspontja alatt is folyékony állapotban tartsuk; ez a *késleltetett fagyás* jelensége. Az *olvadás késleltetésének* kérdése még nincs végleg eldöntve; az általános tapasztalat azt mondja, hogy a szilárd testet, mindig a normális nyomásviszonyokra gondolva, olvadáspontja fölött nem lehet szilárd állapotban tartani; azonban az újabb időkben CARNELLEY-nek állítólag sikerült jeget 0°-on felül szilárd állapotban tartani.\* Ez a kísérlet több oldalról ellenmondásra talált, de PETERSON kimutatta, hogy a tűnemény lehetséges.\*\* Egy újabb, nagyfontosságú s eldöntésre váró kérdés ez. Ezen abnormitásoktól eltekintve, az olvadás és fagyás hőmérséklete ugyanazon testnél egybeesnek.

Az olvadáspontok kísérleti meghatározása, főleg az igen magas és igen mély hőmérsékleteknél, nem mindig a kívánt pontosságú. A módszerek alapelve mindig azon pillanat megfigyelése, melynél a szilárd test melegítése közben a hőmérséklet állandó marad. Az olvadáspontot rendszeren állandónak tekintjük, ellentétben a forrásponttal, melynél a nyomás hatása miatt nagy változások léphetnek föl. Az olvadásra a nyomásnak nincs oly nagy befolyása; hogy egyáltalában van-e befolyása, azt előbb elméletileg, aztán kísérletileg, nem nagyon régen döntötték el. Szóltunk már az alapvető kutatásokról, melyek kiderítették, hogy a nyomás növekedése az olvadáspontot azon testeknél, melyek az olvadáskor kiterjednek, emeli, azoknál, a melyek összehúzódnak, csökkenti (303. lap) s emeltettük, hogy per analogiam következtetni lehet, hogy a szilárd és folyékony állapotok között is van folytonos átmenet. Most az idevágó újabb kutatásokról fogunk szólni.

BATTELLI több anyagnál megvizsgálta az olvadáspontnak a nyo-

---

\* Chem. News. XLIII. pag. 19; 1881.

\*\* Berl. Ber. 1881, II. pag. 808.



mással való összefüggését és kísérleti eredményeit összehasonlította THOMSON elméleti képletével. Készüléke egy zárt vas cső volt, melyet oldalról egy toldalékcső a nyomáskészülékkel kötött össze; felcsavart fedelében gyűszűnyi kis higanynyal telt mélyedés volt, mely a hőmérőt foglalta magában. A vasedényt vörösréz reczi-piensbe tette, melyben a levegőt állandó hőmérsékleten tartotta. Az eredmények azt mutatták, hogy állandó kémiai összetételű testeknél a kísérlet s az elmélet közt igen jó volt a megegyezés, míg a keveréknél nagyobb eltérések mutatkoztak.\*

Anyag	Nyomás p atm.	olv. pont C°	olvadás pont változása		Növekvés 1 atm. nyomás- változásra
			kis.	elm.	
Paraffin	1	52·40	—	—	0·027978
	8	52·64	0·240	0·2238	
	12	52·76	0·360	0·3357	
Spermacet	1	43·90	—	—	0·020482
	8	44·05	0·150	0·1638	
	12	44·12	0·220	0·2458	
Naphtalin	1	79·20	—	—	0·03526
	8	79·48	0·280	0·2821	
	12	79·605	0·405	0·4232	
Nitronaphtalin	1	56·00	—	—	0·01962
	8	56·18	0·180	0·1962	
	12	56·30	0·300	0·2943	
Paratoluidin	1	38·90	—	—	0·01272
	8	39·00	0·100	0·1018	
	12	39·04	0·140	0·1527	
	15	39·08	0·180	0·1908	
Diphenylamin	1	51·00	—	—	0·02306
	8	51·18	0·180	0·1845	
	12	51·26	0·260	0·2767	
Naphtylamin	1	43·400	—	—	0·01627
	8	43·505	0·105	0·1301	
	12	43·580	0·180	0·1952	
	15	43·620	0·220	0·2440	
Lipowitz ötvény	1	71·500	—	—	0·003931
$Bi_{11} Pb_8 Sn_5 Cd_4$	18	71·585	0·085	0·0707	
Wood ötvény	1	82·300	—	—	0·02599
$Bi_4 PbSn_2 Cd_2$	18	82·353	0·053	0·047	

\* Journ. phys. (2) VI. pag. 90; 1881. Beibl. XI. pag. 233; 1887.



Ha az olvadáspontok görbéit felrajzoljuk, szemünkbe tűnik, hogy azok különféleképen viselkednek. A naphtylamin görbéje 1—12 atm. közt alulról konkav, 12—15 atm. közt alulról konvex, tehát a nyomás hatása az olvadáspont emelésére először növekszik, azután csökken. A nitronaphtalin görbéje alulról konkav, tehát a nyomás hatása nő; a többi testnél a görbék alulról konvexek, tehát a nyomás hatása csökken. Látszik, hogy sokkal nagyobb határookra terjesztendők ki a kísérletek, mielőtt biztos eredményeket vonhatnánk belőlünk.

Néhány anyagnál 0—50° közt egészen 3000 atm. nyomásig vizsgálta meg a viszonyokat AMAGAT.<sup>1</sup> A nagy nyomás által sikerült a szénchloridot ( $CCl_4$ ), mely addig szilárd állapotban még nem volt előállítható, megszilárdítani. A megszilárdulás hőmérsékletei és nyomásai:

$$\begin{array}{cccc} t = & -19.5^\circ & 0^\circ & +10^\circ & +19.5^\circ \text{ C} \\ p = & 210 & 620 & 900 & 1160 \text{ atm.} \end{array}$$

Úgy látszik tehát, hogy az olvadás beállításához is bizonyos hőmérséklet és nyomás szükséges. Nem tekintve CARNELLEY-nek erre vonatkozó eredményeit,<sup>2</sup> melyeket a későbbi kutatások helyteleneknek mutattak ki, ezen körülményre utalnak azon kísérletek is, melyeket WROBLEWSKI és OLSZEWSKI, egymástól függetlenül, a nehezen folyósítható gázok megszilárdítására nézve tettek.<sup>3</sup> A megszilárdításhoz szükséges igen mély hőmérsékletek előállítása folyósított gázoknak alacsony nyomás alatt történő elpárolgatásával sikerült. A forráspontokat s a hozzátartozó nyomásokat kutatva azt tapasztalták, hogy a hőmérséklet csökkentésekor egy bizonyos hőmérséklet és nyomás mellett jelentkezett a fagyás. Csak az oxigén maradt még —220° C hőmérsékleten is folyékony állapotban. Megjegyezzük, hogy kísérleteikben a fagyáspont s az olvadáspont nem estek mindig össze; a fagyáspont rendszeren jóval alacsonyabb volt az olvadáspontnál, a mi késleltetett fagyásra mutat.

<sup>1</sup> C. R. CV. pag. 165; 1887. — Beibl. XI. pag. 767; 1887.

<sup>2</sup> Chem. News. XLII. pag. 130; 1880.

<sup>3</sup> WROBLEWSKI, Wied. Ann. XXV. pag. 371; 1885. — OLSZEWSKI, Phil. Mag, (5) XXXIX. pag. 188; 1895.



Az újabb kísérletek tehát mindig meggyőzőbben mutatnak azon körülményre, hogy az olvadás is bizonyos hőmérséklet és nyomás mellett lehetséges, a mi pedig még valószínűbbé teszi, hogy a szilárd és folyékony testek között is van folytonos átmenet. Úgy látszik, hogy itt az igen nagy nyomások kifejtése fog fontos szerepet játszani.

*Az olvadás melegének meghatározása kalorimetrikus úton szokott történni még pedig rendesen a megszilárdulásnál felszabaduló melegmennyiséget mérjük meg. A hőmérséklettel való összefüggésre nézve a kísérleti eredmény az, hogy az olvadás melege a hőmérséklettel emelkedik.\**

Beható kutatások tárgya azon bonyolódott viszonyok, melyek a *keverékek* és *oldatok* esetében merülnek föl; különösen a fagyáspont csökkenése, melyet idegen anyagok hozzákeverése okoz, teszi számos vizsgálat tárgyát.

BLAGDEN (1788) és később RÜDORFF (1861) megállapították, hogy oldatoknál a fagyáspont csökkenése arányos a feloldott anyag mennyiségével: RAOULT (1881) pedig kimutatta, hogy minden egyes oldóanyagra a feloldott anyagok molekuláris fagyáspont csökkenése állandó szám. A fagyáspont csökkenést elméleti úton VAN T'HOFF határozta meg: elmélete a kísérleti eredményekkel jó megegyezést mutat. Alapföltevése az, hogy az oldatban minden anyagra analog viselkedést állapít meg, mint a gázokra a BOYLE-MARIOTTE, GAY-LUSSAC, AVOGADRO törvények. A törvény általában elég jó megegyezést mutat a *fémötvényeknek* is.

Ezen vizsgálatokra itt csak röviden utalhattunk; l. bővebben: THAN, Kis. Chem. I. — OSTWALD, Allg. Chem. I.

## 16. §. Összefoglalás.

A halmazállapot változásainál két lényeges mennyiség szerepel: az állapotváltozás hőfoka és melege.

A régi, legegyszerűbb nézet az *állapotváltozás hőfokáról* azt

\* PETTERSON Journ. chem. Soc. XXIV. pag. 129, 293; 1881.



mondta, hogy van *egy* olyan hőmérséklet, melynél a folyékony test hőközlés következtében, tehát *forrás* útján légnemüvé válhat és *egy* oly hőmérséklet, melynél a szilárd test hőközlés folytán, tehát *olvadás* által folyóssá lehet; mai tudásunk más világításban látja a tényeket.

A mi a *gőzölgést* illeti, tudjuk, hogy a forrás számtalan sok hőmérsékletnél beállhat, ha csak a test egy bizonyos, hőmérsékletek szerint különböző nyomásnak van alávetve. A forrásra nézve tehát hőmérséklet és nyomás között bizonyos meghatározott összefüggés létezik, a melyről egyelőre csak annyit tudunk, hogy mindkét mennyiség egyenlő értelemben változik. Ha tehát a testre ható nyomás növekedik, a hőmérsékletnek is magasabbnak kell lenni, hogy a forrás beállhasson. A hőmérsékletek növekedésében van egy felső határ, a *kritikus hőmérséklet*, melyen felül nem lehet szó folyadékról s így forrásról sem; a *kritikus hőmérsékletet* ezen szempontból úgy definiálhatjuk, mint a test *maximális forráspontját*. Az ezen hőmérsékletnél fellépő nyomás pedig, a *kritikus nyomás*, a test *telített gőzeinek maximális nyomása*. A kritikus hőmérséklet tehát az összes forráspontok között kiváló helyet foglal el, a mit mutatnak a nyomás görbék graphikonjai is, melyek a kritikus hőmérséklet közelében más viselkedésűek, mint attól távol. A graphikonok még egy másik kiváló forráspontra mutatnak, mely a normális légnyomás mellett jelentkező *normális forráspont*.

A hőmérséklet és a telített gőz nyomása között minden testnél más az összefüggés; ha itt szabályszerűséget keresünk, két szempont szerint kérdezhetünk: 1. mi az összefüggés különböző testeknek azon forráspontjai között, melyek egyenlő nyomásoknál jelentkeznek; 2. mi az összefüggés különböző testek telített gőzeinek azon nyomásai között, melyek egyenlő forráspontoknál lépnek föl? Az ismertetett szabályok mind az első szempont szerint felelnek a kérdésre.

DALTON szerint az egyenlő nyomásokhoz tartozó forráspontok a normális forrásponttól egyenlő távolságban vannak, a mely összefüggést DÜHRING úgy változtatta meg, hogy ezen pontok bizonyos, anyagonként változó állandóval különböznek egymástól. Ez a két



szabály tehát a normális forráspontot veszi alapul; általánosabb szempontból állították fel RAMSAY és YOUNG összefüggésüket egy egyenlet alakjában. Ezen szabályok érvényességi köre szempontjaik általánosságától függ; legnagyobb köre a legutóbb említettnek van, mely specziális esetek gyanánt a másik kettőt magában foglalja, legkisebb DALTONÉnak. Egészen általános érvényességről, mely a kritikus állapotokra is vonatkoznék, ezeknél nem lehet szó. A kritikus állapot tekintetbe vételével mondja ki VAN DER WAALS elméleti okoskodásokon alapuló szabályát, mely szerint a redukált forráspontoknak megfelelő nyomások is redukáltak. A kísérleti eredmények részben azt mutatják, hogy az egyes anyagok kémiai szerkezetét tekintetbe kell venni; ezt azonban még nem tekinthetjük döntő eredménynek, míg a kritikus állandók nincsenek nagyobb pontossággal meghatározva.

A szabályszerűségek más csoportja a két kiváló forráspont összefüggését keresi; teljes biztossággal még ezt sem lehetett megtalálni, mert NADEJDINE szabálya, mely szerint ezen két forráspont különbsége homológ és isomer vegyületeknél állandó, csak közelítőleg tekinthető érvényesnek.

A forrásnak analog folyamatát, az *olvadást* tekintve, találunk néhány analog jelenséget. Az újabb kutatásokból, melyeknek első impulsusát ANDREWS-nak a kritikus állapotról való felfedezésében kell keresni, arra mutatnak, hogy az olvadás, a míg folyékony testről szó lehet, tetszőleges hőmérsékletnél végbemehet, ha a testre gyakorolt nyomás egy bizonyos, a hőmérséklet által meghatározott értéket ért el. Ugyanilyen állandó összefüggésre mutatnak a hőmérséklet és nyomás között azon kísérletek, melyek a szilárd testek elgőzölgésének feltételeit kutatták.

A keverékekre nézve eddig a leglényegesebb és legbiztosabb eredmény, hogy ezeknél úgy a forráspont, mint az olvadáspont leszáll. Ezen leszállás quantitativ meghatározására még nincsenek minden kétségen felül álló összefüggéseink. Az bizonyosnak látszik, hogy az állapotváltozás pontjának csökkenése a feloldott, vagy hozzákevert anyag mennyiségével áll összefüggésben; mindkét folyamatnál továbbá az mutatkozik, hogy a molekuláris csökkenés



ugyanazon oldószer esetében független a feloldott anyag minőségétől.

A *gőzölgés melegéről* láttuk, hogy a hőmérséklet emelkedésével csökken s a kritikus hőmérsékleten zérus lesz; az *olvadás melege* pedig emelkedik a hőmérséklettel. Ezen kétféle változás összhangba állításáról csak akkor lehet gondolkozni, ha több kísérlet fogja megvizsgálni az olvadás melegének a hőmérséklettel való viszonyát s különösen, ha ugyanazon test olvadás és gőzölgés melegének a hőmérséklettel való összefüggését fogják kutatás tárgyává tenni. Feltűnik azonban azon körülmény, hogy talán az olvadás melegének a hőmérséklet csökkenésekor minimuma szintén zérus s hogy ezen érték is egy kritikus pontnál léphet fel.

Nem terjeszkedtünk ki megbeszélésünkben azon abnormalis viszonyra, melyet az olvadásnál késleltetett fagyás és olvadás névvel neveztünk el s melynek analogonja, mint késleltetett forrás, szintén megtalálható.



## MEGOLDOTT FELADATOK.

26. Bizonyítsák be, hogy a tetraéder magasságainak hiperboloidja ama fajhoz tartozik, a melynél a Laplace-egyenlet gyökeinek összege zérus. (VÁLYI.)

★

*Második megoldás Breuer Mór tanárjelölt úrtól Budapesten.*

A hiperboloid egyenletének felállításánál a Salmon-Fiedler könyvében (Anal. geom. des Raumes I. Th. III. Auflage 131. l.) található eredményt fogom felhasználni, miért is ezt idézem először:

Ha az  $e_1, e_2, e_3$  egyenesek meghatározta hiperboloid egyenletét fel akarjuk állítani, akkor képzeljük  $e_1$ -et és  $e_2$ -öt mint két-két sík metszetét, úgy hogy a négy sík koordináta-tetraédert alkosson; tehát az első két egyenes egyenletei:

$$\begin{aligned} e_1) \quad x_1 &= 0, \quad x_2 = 0, \\ e_2) \quad x_3 &= 0, \quad x_4 = 0. \end{aligned}$$

Akkor a harmadik egyenes egyenletei mindig úgy választhatók, hogy alakjuk:

$$e_3) \quad x_1 = Ax_3 + Bx_4, \quad x_2 = Cx_3 + Dx_4^*$$

legyen és ekkor a hiperboloid egyenlete:

$$H_{123}) \quad x_2 (Ax_3 + Bx_4) = x_1 (Cx_3 + Dx_4).$$

Legyenek már most tetraéderünk határlapjai  $A_1, A_2, A_3, A_4$  úgy hogy:

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv u_1x + v_1y + w_1z + 1 = 0 \\ A_2 &\equiv u_2x + v_2y + w_2z + 1 = 0 \\ A_3 &\equiv u_3x + v_3y + w_3z + 1 = 0 \\ A_4 &\equiv u_4x + v_4y + w_4z + 1 = 0 \end{aligned}$$

a tetraéder oldallapjainak egyenletei.

---

\* Az  $e_3$  tengelyű síksorból kiválasztván azon síkokat, melyek az  $(x_1, x_3, x_4)$  illetve  $(x_2, x_3, x_4)$  síksoportok metszéspontjain mennek át.



Azt a síkot, a mely az a tetraédernek ( $A_j, A_k$ ) élén keresztül megy és  $A_i$ -re merőleges, valamint egyenletének baloldalát  $M_{ik}^{(i)}$ -vel fogom jelölni és az ily síkokat, mivel magasságokat tartalmaznak, *magasságsíkoknak* nevezni.

Egyenletét megkapjuk, ha az

$$(S_k) \quad A_j + kA_k = 0$$

síksor ( $k$  parameterrel) síkjai közül azt választjuk ki, a mely az  $A_i$ -re merőleges.

A síksor általános síkjának egyenlete részletesen kiírva :

$$(S_k) \quad u_j x + v_j y + w_j z + 1 + k(u_k x + v_k y + w_k z + 1) = 0$$

vagy rendezve

$$(S_k) \quad (u_j + ku_k)x + (v_j + kv_k)y + (w_j + kw_k)z + 1 + k = 0 ;$$

annak feltétele hogy  $S_k \perp A_i$  legyen pedig a következő :

$$(u_i + ku_k)u_i + (v_i + kv_k)v_i + (w_i + kw_k)w_i = 0,$$

a honnan  $k$  értéke :

$$k = -\frac{u_i u_j + v_i v_j + w_i w_j}{u_i u_k + v_i v_k + w_i w_k} = -\frac{(ij)}{(ik)}$$

ha

$$(ij) = u_i u_j + v_i v_j + w_i w_j = (ji)$$

teszszük, úgy hogy végre az  $M_{kl}^{(i)}$  magasságsík egyenlete :

$$M_{jk}^{(i)} \equiv (ij) A_k - (ik) A_j = 0.$$

Ha a tetraéder hat élének mindegyikéből az átellenes két oldallapra merőleges síkokat bocsátunk, kapjuk a tetraéder 12 magasságsíkját, a melyek közül 8 hármas síkcsoport választható ki úgy, hogy azok egy egyenesben messék egymást és pedig :

$$m_i \perp A_i.$$

1. A tetraéder magasságvonalalaiban metszik egymást a következő csoportok :

$$m_1\text{-ben : } M_{23}^{(1)}, \quad M_{34}^{(1)}, \quad M_{42}^{(1)},$$

$$m_2\text{-ben : } M_{34}^{(2)}, \quad M_{41}^{(2)}, \quad M_{13}^{(2)},$$

$$m_3\text{-ban : } M_{41}^{(3)}, \quad M_{12}^{(3)}, \quad M_{24}^{(3)},$$

$$m_4\text{-ben : } M_{12}^{(4)}, \quad M_{23}^{(4)}, \quad M_{31}^{(4)},$$

általában

$$m_i\text{-ben : } M_{jk}^{(i)}, \quad M_{kl}^{(i)}, \quad M_{ij}^{(i)},$$



mert mint közvetlenül igazolható :

$$(il) M_{jk}^{(i)} + (ij) M_{kl}^{(i)} + (ik) M_{lj}^{(i)} = 0. \quad (1)$$

2. Az  $m_i$  triédermagasságvonalakban (az  $A_i$ -val szemben levő triéder magasságsíkjaiknak közös metszésvonalaival) metszik egymást a következő csoportok :

$$m'_1\text{-ben: } M_{34}^{(2)}, M_{42}^{(3)}, M_{23}^{(4)},$$

$$m'_2\text{-ben: } M_{41}^{(3)}, M_{13}^{(4)}, M_{34}^{(1)},$$

$$m'_3\text{-ban: } M_{12}^{(4)}, M_{24}^{(1)}, M_{41}^{(2)},$$

$$m'_4\text{-ben: } M_{23}^{(1)}, M_{31}^{(2)}, M_{12}^{(3)},$$

általában

$$m'_i\text{-ben: } M_{kl}^{(j)}, M_{lj}^{(k)}, M_{jk}^{(l)},$$

mert

$$M_{kl}^{(j)} + M_{lj}^{(k)} + M_{jk}^{(l)} = 0. \quad (2)$$

Áttérhetünk már most ama hiperboloid egyenletének felállítására, a mely az  $m_1, m_2, m_3$  magasságokat tartalmazza.

Tekintsük  $m_1$ -et mint a rajta átmenő  $M_{23}^{(1)}$  és  $M_{34}^{(1)}$

$$\text{« } m_2\text{-öt} \quad \text{« } \quad \text{« } M_{13}^{(2)} \text{ és } M_{34}^{(2)}$$

magasságsíkok metszetét (mely 4 magasságsík ( $M$ ) koordináta-tetraéderlap gyanánt lesz egyelőre bevezetve), úgy hogy összehasonlíttva a SALMON-ból idézetekkel :

$$x_1 \equiv M_{23}^{(1)}, \quad x_2 \equiv M_{24}^{(1)}$$

$$x_3 \equiv M_{13}^{(2)}, \quad x_4 \equiv M_{34}^{(2)}$$

már most csak az  $m_3$  egyenesnek az ott kívánt alakú egyenletrendszere állítandó fel.

Az  $m_3$ -on átmenő síksor általános síkjának egyenlete homogén parameterekkel :

$$k_1 M_{12}^{(3)} + k_2 M_{14}^{(3)} = 0;$$

akkor, hogy ez egyenlet a kívánt

$$M_{23}^{(1)} - A M_{13}^{(2)} - B M_{34}^{(2)}$$

illetve

$$M_{34}^{(1)} - C M_{13}^{(2)} - D M_{34}^{(2)}$$

alakot vegye fel, a  $k_1, k_2$  oly módon határozandók meg, hogy a megfelelő kifejezések az ( $A$ ) homogén változó rendszerben identitásokká legyenek ;



( $k$ )-nak megfelelő parameterértékeket ( $A'$ ,  $B'$ ) illetve ( $C'$ ,  $D'$ )-vel jelevén, a feladatunk meghatározni az ( $A'$ ,  $B'$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C'$ ,  $D'$ ,  $C$ ,  $D$ ) értékeket úgy, hogy az

$$\begin{aligned} A' M_{12}^{(3)} + B' M_{14}^{(3)} &\equiv M_{23}^{(1)} - A M_{13}^{(2)} - B M_{34}^{(2)} \\ C' M_{12}^{(3)} + D' M_{14}^{(3)} &\equiv M_{34}^{(1)} - C M_{13}^{(2)} - D M_{34}^{(2)} \end{aligned}$$

identitások legyenek, ha bennük az ( $M$ ) kifejezéseit ( $A$ )-ban helyettesítjük.

Előbbi tárgyalásaink után azonban az első egyenletről nem is kell az ( $A$ )-ban kifejezett egyenleltre átmenni, mert (2) szerint

$$M_{23}^{(1)} + M_{31}^{(2)} + M_{12}^{(2)} = 0,$$

vagy: [mert  $M_{31}^{(2)} = -M_{13}^{(2)}$ ]

$$-M_{12}^{(3)} = M_{22}^{(1)} - M_{31}^{(2)}$$

azaz

$$A' = -1, \quad B' = 0; \quad A = 1, \quad B = 0$$

megfelel a feladatnak.

A második azonosságból meghatározandó állandókra pedig, ha ( $M$ )-eket az ( $A$ )-kban fejezzük ki, nyerjük:

$$\begin{aligned} &((23) C' + (34) D' + (23) C) A_1 - (13) C' A_2 + \\ &+ (- (14) - (12) C + (24) D) A_3 + (- (13) D' + (13) - (23) D) A_4 = 0 \end{aligned}$$

azaz először

$$\begin{aligned} C = 0; \quad (23) C + (34) D' = 0, \quad (12) C - (24) D + (14) = 0, \\ (23) D + (13) D' - (13) = 0. \end{aligned}$$

Szükségünk csak a  $C$ ,  $D$  számokra van, ezekre pedig a számítás adja, hogy

$$C = \frac{(34)}{(23)} \frac{\mu}{\lambda}, \quad D = - \frac{(13)}{(23)} \frac{\nu}{\lambda},$$

hol

$$\begin{aligned} \lambda &= (12) (34) - (13) (24) \\ \mu &= (13) (24) - (14) (23) \\ \nu &= (14) (23) - (12) (34), \end{aligned}$$

e mennyiségek közt pedig a

$$\lambda + \mu + \nu = 0$$

relatív áll fenn.

Ugy hogy a keresett hiperboloid egyenlete az ( $M$ ) koordinátarendszerre vonatkoztatva:

$$H(M) \equiv M_{23}^{(1)} ((13) \nu M_{33}^{(2)} - (34) \mu M_{13}^{(2)}) + (23) \lambda M_{34}^{(1)} M_{13}^{(2)} = 0$$



vagy az  $(A)$  koordinátarendszerre :

$$H_{123}(A) \equiv (34) \mu A_1 A_2 + (24) \nu A_1 A_3 + (23) \lambda A_1 A_4 + (14) \lambda A_2 A_3 + \\ + (13) \nu A_2 A_4 + (12) \mu A_3 A_4 = 0.$$

Ha a hiperboloidnak egyenlete az  $(xyz)$  derékszögű koordináta rendszerben :

$$H(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + \dots = 0,$$

akkor a LAPLACE-egyenlet gyökeinek összegéről az

$$L_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$$

egyenlőség mutatandó ki helyesnek.

Az  $a_{11} + a_{22} + a_{33}$  kifejezés képzése céljából azonban jegyezzük meg, hogy ha a hiperboloid egyenletét röviden

$$H_{123}(A) = \sum_{i,j=1}^4 a_{ij} A_i A_j = 0$$

alakba írjuk, akkor eme  $H_{123}(A)$  kifejezés  $a_{ij} A_i A_j$  tagja :

$$a_{ij} A_i A_j = a_{ij} (u_i x + v_i y + w_i z + 1) (u_j x + v_j y + w_j z + 1)$$

lévén a szóban forgó kifejezés képzéséhez az

$$a_{ij} (u_i u_j + v_i v_j + w_i w_j) = a_{ij} (ij)$$

összeadandóval fog hozzájárulni, azaz  $H_{123}(A)$ -ból nyerem  $L_1$ -et, ha  $A_i A_j$  helyébe  $(ij)$ -t tesztek

$$H_{123}(A) = H_{123}(A_1, A_2, A_3, A_4); \\ L_1 = [H_{123}(A)]_{A_i A_j (= (ij))} = [H_{123}(\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4})]_{\bar{1}\bar{2}} = (12)$$

azaz ha  $\lambda, \mu, \nu$  értékeit helyettesítettük, végre kell hogy

$$L_1 = 2 \{ (12) (34) \mu + (13) (24) \nu + (14) (23) \lambda \} = 0$$

vagy

$$((14) (23) - (13) (24)) \lambda + ((12) (34) (13) (24)) \mu \\ = -\mu \lambda + \lambda \mu = 0.$$

★

*Harmadik megoldás Szabó Péter főgymnasiumi tanár úrtól  
Budapesten.*

Ha a LAPLACE-egyenlet gyökeinek összege eltűnik, akkor a hiperboloid aszimptotikus kúpján végtelen sokszor találhatunk három, egymásra merő-



leges alkotót.\* Ebből következik, hogy az ilyen hiperboloidnak valamelyik alkotójára merőleges síkkal való metszésgörbéje olyan kúpszelet, a melynek aszimptotái merőlegesek egymásra, azaz: *egyenlő oldalú hiperbola*. Ezt akarjuk a feladatban kimondott tétel igazolására kimutatni.

Jelöljék a tetraéder szögpontjait  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Legyen  $a_i$  az  $A_i$  ponton átmenő magasság. Az  $A_k A_l A_m$  háromszög síkját  $a_i$ , magasságpontját  $B_i$ ;  $a_i$  normálisát ebben a pontban  $b_i$  jelölje. ( $i, k, l, m = 1, 2, 3, 4$ .)

Mind az  $a_i$ , mind a  $b_i$  egyenesek alkotói a hiperboloidnak.\* Tehát az  $a_i$  sík egy alkotóra merőleges, s metszésgörbéjén az  $A_k, A_l, A_m$  és  $B_i$  pontok rajta vannak. Ez a kúpszelet *egyenlő oldalú hiperbola*, mert három pontja alkotta háromszögnek magasságpontján is keresztül megy. De evvel tételünk igazolása is megtörtént, mert elég ezt a tulajdonságot egy alkotóra merőleges síkmetszetre kimutatni.

A szóban forgó egyköpenyű hiperboloidon az említett 8 alkotón ( $a_i, b_i$ ) kívül még 4-et mutathatunk ki.

Jelöljük az  $A_i$ -ben levő háromélű testszög magasságvonalát  $c_i$ -vel. Ez metszi az  $a_k$  magasságok mindegyikét. Az  $a_i$ -t is, mert  $A_i$  közös pontjuk. De mivel  $c_i$  benne fekszik az  $A_i A_k$  élen átmenő és  $a_k$ -ra merőleges síkban, közös síkja van  $a_k$ -val, a mely  $A_k$  ponton megy át és  $a_k$ -ra merőleges. Tehát  $a_k, c_i$  metszik egymást. *Ezért a  $c_i$ -k is alkotók.*

A 12 alkotó közül  $a_i$  egyenesek az egyik,  $b_i$  és  $c_i$  a másik rajzhoz tartoznak.

Az  $[a_i, c_i]$  síkok a tetraéder szögpontjaiban érintik a hiperboloidot.

Ha a magasságok kettenként metszik egymást a hiperboloid két síkká fajul. Könnyen belátható, hogy e síkok egymásra merőlegesek.

Messék egymást  $a_i, a_k$  és  $a_l, a_m$ .

Tekintetbe véve, hogy  $a_i$  merőleges  $a_i$ -re és  $a_k, a_k$ -ra,  $[a_i a_k]$  sík merőleges mind  $a_i$ -re, mind  $a_k$ -ra, tehát közös egyenesükre  $A_l A_m$  élre. De ekkor az  $A_l A_m$  élt tartalmazó minden sík merőleges  $[a_i a_k]$ -ra, tehát  $[a_l a_m]$  is.

Evvel mellékesen azt is kimutattuk, hogy ha a tetraéder magasságai kettenként metszik egymást, akkor egy pár szemben fekvő éle egymásra merőleges.

Ha a magasságoknak közös pontjuk van, a hiperboloid összeesik aszimptotikus kúpjával, a melynek centruma a közös pont. Ebben az esetben minden él merőleges a szemben fekvő élre.

\* SALMON-FIEDLER. Analyt. G. des Raumes I. 264. 3. Aufl.

\*\* L. VÁLYI Gy. közleményét M. P. L. III. köt. 56. l.



## KITÜZÖTT FELADATOK.

37. Legyen adva az

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, \dots$$

valós vagy komplex számokból álló sorozat, és jelentse  $D_{mp}$  a következő  $(p+1)$ -ső fokú determinánst

$$D_{mp} = \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \dots & a_{m+p} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \dots & a_{m+p+1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m+p} & a_{m+p+1} & \dots & a_{m+2p} \end{vmatrix}.$$

Bebizonyítandó, hogy ha

$$\lim_{m=\infty} a_m = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{m=\infty} \sup. \left| \sqrt[m]{a_m} \right| = 1,$$

akkor egyszersmind

$$\lim_{m=\infty} D_{m1} = 0, \quad \lim_{m=\infty} D_{m2} = 0, \quad \dots, \quad \lim_{m=\infty} D_{mp} = 0, \dots$$

és

$$\lim_{m=\infty} \sup. \left| \sqrt[m]{D_{m1}} \right| = 1, \quad \lim_{m=\infty} \sup. \left| \sqrt[m]{D_{m2}} \right| = 1, \dots,$$

$$\lim_{m=\infty} \sup. \left| \sqrt[m]{D_{mp}} \right| = 1, \dots$$

(A  $\lim_{m=\infty} \sup.$  jelentését lásd e lapok IV. kötetének 244—247. lapján.)

(KÜRSCHÁK.)



## Értesítő a Math. Phys. Társulat előadásairól.\*

1897. január 14. *Iszlai József*: A testrészek átvilágítása Röntgen-sugarakkal.
- február 4. *Réthy Mór*: A Hamilton-féle tételről s a legkisebb actió elvéről.
- február 18. *Réthy Mór*: A legkisebb kényszer elvéről.
- márczius 1. *Csillag Vilmos*: A lineár egyenletrendszerek megoldása.
- márczius 18. *B. Eötvös Loránd*: Mágnesrudak pólusainak meghatározásáról.
- Pekár Dezső*: Az egyetemi physikai intézet néhány újabb szerzeményének bemutatása.
- április 1. *Suták József*: A Riemann-féle felületek elágazási pontjainak meghatározásáról.
- április 29. *Kürschák József*: Az egész függvények elméletéről.
- november 18. A IV. math. tanulmányverseny eredményének kihirdetése és a díjak kiosztása.
- König Gyula*: A határozott integrálok elméletéhez.
- december 2. *Kürschák József*: A szabályos tizenkétszögről.
- Kövesligethy Radó*: A Föld alakjának és nagyságának meghatározása egy helyből eszközölt holdmegfigyelések alapján.
- december 16. *Szijártó Miklós*: Egy tétel a görbületek elméletéből.
- Rados Gusztáv*: Az orthogonális helyettesítés elméletéhez.
- König Gyula*: A görbületi sugarakról.
- Kürschák József*: A görbületi sugarakról.
- Kövesligethy Radó*: Gáznemű égi testek fajhője.
1898. január 20. *Réthy Mór*: Weierstrass néhány megjegyzése a Dirichlet-féle elv bebizonyítására.
- Pekár Dezső*: A fagypon-t-csökkenés meghatározásáról.
- február 3. *Tangl Károly*: A kohererről.
- Szimányi S.* A kúpnak síkokkal való osztása adott térfogatú részekre.

---

\* Az V. kötetben 314. lapon adott értesítő folytatása.



- február 17. *Bauer Mihály*: A határ fogalmának általánosítása.  
*Kövesligethy Radó*: A Hold hegyeinek kísérleti utánzása.
- márczius 3. *Rados Gusztáv*: A quadratikus alakok számelméletének geometriai szemléltetése.  
*Tangl Károly*: Néhány kísérlet elektromos hullámokról.
- márczius 17. *Kürschák József*: Az öt pontból meghatározott kúpszelet diszkriminánsáról.  
*Kövesligethy Radó*: A Schmidt-féle napelmélet.
- április 21. *Anderkó Aurél*: Komplex változó gammafüggvénye.  
*Pekár Dezső*: A bolometerről.
- november 17. Az V. math. tanulóverseny eredményének kihirdetése és a díjak kiosztása.  
*Kürschák József*: A derékszögű gömbháromszögekről.
- december 1. *Rados Gusztáv*: A szavazat lefolyásának valószínűsége.  
*Mikola Sándor*: A kritikus állapotról.
- december 15. *Réthy Mór*: Az erők egyensúlya folytonos testekben a feszültség fogalmának bővítésével.  
*Suták József*: Invariánsok előállítása integrálás útján.
1899. január 12. *Klupathy Jenő*: A Rhumkorff-induktoriumról.
- január 19. *Bauer Mihály*: A csoportelmélet újabb irodalmáról.
- február 9. *Kövesligethy Radó*: Gázállományú világtestek fizikájából.  
*Kopp Lajos*: Adalék az  $n$ -dimenziós geometriához.
- február 23. *B. Eötvös Loránd*: A mágneses haladtató erőről.  
*Kürschák József*: Centrosymmetrikus determinánsokról.
- márczius 9. *Wittmann Ferencz*: Elektrolitikus áramszaggató.  
*Juckel Gyula*: A kamatszámítás elméletéről.
- április 20. *Juckel Gyula*: A kamatszámítás elméletéről.  
*Szabó Péter*: Az elektrosztatika alaptüneményének egyik mechanikai analogonjáról.  
*Klupathy Jenő*: Kathod-sugarak forgó mágnesi térben.
- október 26. A VI. math. tanulóverseny eredményének kihirdetése és a díjak kiosztása.  
*Csillag Vilmos*: A négy dimenziós szabályos testek projekciója a háromdimenziós térre.
- november 9. *Mikola Sándor*: Az elektromágneses tér hatása a fényre.  
*Kürschák József*: A hatványsorok elméletéhez.
- november 23. *Beke Manó*: A gammafüggvények egy tulajdonságáról.  
*Korda Dezső*: A villamos kemence termékei.
- december 7. *Kürschák József*: A geometria alapjairól.  
*Steiner Lajos*: Újabb kutatások a földmágnesség elméletében.
- december 21. *Bauer Mihály*: A csoportdeterminánsról.



### *Tagdíjat fizettek:*

**1894. évre:** Bujk Béla, Félix János, Frosch Károly, Hassák Vidor, Kronith Lénárd, Szabó József. (bp.) Összesen : 6.

**1895. évre:** Grosz Ferencz, Miklós Ödön, Nuricsán József dr., Steiner Simon dr. Összesen : 4.

**1896. évre:** Angheben Albin, Bein Károly, Kiss Károly dr., Konkoly Miklós dr., Pfeiffer Péter dr. Összesen : 5.

**1897. évre:** Balog Mór, Berkes Ottó, Fabinyi Rezső dr., Jeney Pál, Kemény Ferencz dr., Muraközy Károly, Németh Antal dr., Németh Zs.-né, Földes Izabella, Schmidt János dr., Steecz György dr., Szavkay Ede, Tordai Imre. Összesen : 12.

**1898. évre:** Homor István, Jeney Pál, Kiss János Ernő, Németh Zs.-né, Földes Izabella, Süss Nándor. Összesen : 5.

**1899. évre:** Abt Antal dr., Anderkó Aurel dr., Arany Dániel, Avéd Jakó, Barabás Jenő, Berkes Imre, Csehély Adolf, Csemez József, Demetzky Mihály dr., Eltscher Simon, Farkas Gyula dr., Feichtinger Győző, Ferenczy József, Gerevich Emil dr., Halmi János, Heller Richárd, Janell József, Juckel Gyula dr., Károlyi Lajos, Kiss Dénes, Klúg Nándor dr., Kopp Lajos dr., Kövesligethy Radó dr., Kúnfalvi Rezső (kieg. 1 frt), Láng Emil, Lengyel Sándor, Lukácsi György, Lukáts László, Lutter János, Mikola Sándor, Németh Zs.-né, Földes Izabella, Ondrus Pál, Oszlaczky Szilárd, Pék János, Ráth A. Lajos, Riegler Sándor, Róna Zsigmond, Schenek Gyula, Schuller (Dózsá) János, Stepháni Ervin, Steiner Lajos dr., Straub Sándor, Szakmáry József, Szépréthy Béla, id. Szily Kálmán, Szirtes Ignác, (250) Tasch Antal, Thánhoffer Lajos dr., Vater József, Vidovich Bonaventura, Vörös Cyrill, Weber Márton, Wodeczky József. Összesen : 53.

**1900. évre:** Kúnfalvi Rezső (2 frt), Németh Zs.-né, Földes Izabella, Pap János, Ráth A., Lajos, Stephani Ervin. Összesen : 5.

Budapest, 1899 deczember hó 15-én.

*Feichtinger Győző*

pénztárnok.